perpendiculaire … tui, à une vitesse uniforme … en même temps que l'axe XX … ment de translation, dans le sens de sa … uniforme V.

Fig. 1.

Du fait de la rotation autour de l'axe XX, le point O sera animé, dans le sens OY, d'une vitesse périphérique qui s'exprimera par $2.\pi.N.\rho$, ρ étant la distance du point O à l'axe de rotation XX. D'autre part, du fait de l'avancement longitudinal de l'axe de rotation lui-même, le point O possédera aussi une vitesse V dans le sens parallèle à l'axe XX. La vitesse réelle du point O sera la résultante des deux vitesses $2.\pi.N.\rho$ et V; elle sera donc représentée, en grandeur et en direction, par OT, diagonale du rectangle, dont les côtés sont respectivement $2.\pi.N.\rho$ et V. Cette diagonale représentera aussi la tangente à la trajectoire réelle suivie par le point O; laquelle trajectoire sera une ligne hélicoïdale, résultant de l'enroulement de la diagonale OT

Considérons un point O (fig. 1) situé sur un rayon rigide, fixé perpendiculairement à un axe XX tournant solidairement avec lui, à une vitesse uniforme de N tours à la seconde ; supposons en même temps que l'axe XX lui-même soit animé d'un mouvement de translation, dans le sens de sa longueur, avec une vitesse uniforme V.

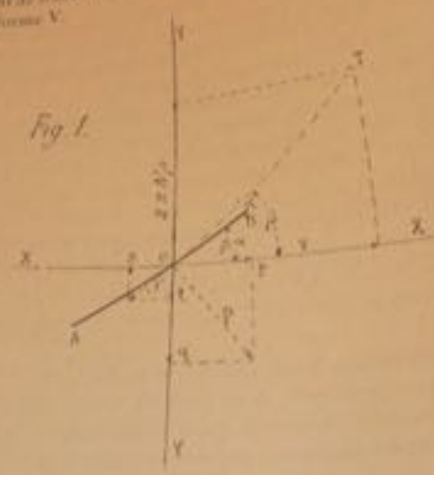


Fig. 1.

sur la surface cylindrique, dont l'axe serait XX, et le rayon ρ.

Le pas de cette ligne hélicoïdale serait $\frac{V}{N}$, qui représente aussi l'avance par tour. En appelant β l'angle que fait cette tangente OT avec la génératrice du cylindre projetée en XX, nous avons :

$$\text{tang}\ \beta = \frac{2.\pi.N.\rho}{V} \quad \text{et} \quad 2.\pi.N.\rho = V.\ \text{tang}\ \beta.$$

Si le mouvement du point O a lieu dans un fluide au repos, la vitesse relative du point O par rapport au fluide sera dirigée suivant O T, ou, ce qui revient au même, les filets fluides rencontreront le point O suivant la direction TO.

Fixons, au point O sur le rayon ρ, un élément de plan passant par ce rayon, et se projetant sur le plan XY suivant AB ; de plus, orientons cet élément de façon à ce qu'il fasse avec la direction OT un angle α, en dedans de l'angle β, de façon à ce que l'angle de l'élément plan avec l'axe des X soit $(\beta-\alpha)$.

Lorsque l'élément AB sera entraîné dans le mouvement du point O, suivant le chemin hélicoïdal OT, tous les points de l'élément AB rencontreront les filets fluides suivant des directions parall…

[illegible]

... des directions parallèles à OT et par conséquent sous une incidence α.

L'Aérodynamique nous apprend que dans ces conditions l'élément plan éprouvera, de la part du fluide rencontré, une certaine résistance, dont la direction nous est, pour le moment, inconnue. Cette résistance sera proportionnelle à l'étendue de la surface, au carré de la vitesse et très approximativement au sinus de l'angle d'incidence ; elle s'exprimera par la formule $R = K. S. W.^2 \sin \alpha$, où K est coefficient empirique, et W la vitesse de l'élément dans le fluide au repos. Cette résistance pourra toujours être représentée par ses deux composantes : l'une P, dirigée perpendiculairement à la tangente à la trajectoire, et que nous appellerons la poussée utile, et l'autre f, dirigée suivant OT, mais en sens opposé, et qui représentera la résistance nuisible. Quelle que soit la direction de la résistance et les valeurs numériques de ces deux forces P et f, elles pourront toujours être reliées par une relation telle que $f = \nu . P$, dans laquelle ν est un coefficient constant indépendant de la vitesse, puisque f et P sont les composantes d'une même résistance, et varient toutes les deux en même temps, et de la même façon, proportionnellement au carré de la vitesse.

Les deux composantes se trouvant dans un plan parallèle au plan XY, leurs projections sur l'axe des Z seront nulles, tandis que leurs projections respectives sur les axes des X et Y seront : pour les X :

$$+ Op \quad \text{et} \quad - Os$$

et pour les Y :

$$- Oq \quad \text{et} \quad - Ot$$

Exprimant ces projections en fonctions de P, de μ et de β, on a :

$$Op = P \sin \beta,$$
$$Os = f \cos \beta = \mu P \cos \beta,$$
$$Oq = P \cos \beta,$$
$$Ot = f \sin \beta = \mu P \sin \beta.$$

La somme algébrique de ces [illegible]

et pour les Y : — Oq et [illegible]

Exprimant ces projections en fonctions de [illegible] on a :

$$Op = P \sin \beta,$$
$$Or = f \cos \beta = \mu P \cos \beta,$$
$$Oq = P \cos \beta,$$
$$Ot = f \sin \beta = \mu P \sin \beta.$$

La somme algébrique de ces projections sur l'axe des X sera :

$$Op - Or = P (\sin \beta - \mu \cos \beta)$$

et sur l'axe des Y :

$$- (Oq + Ot) = - P (\cos \beta + \mu \sin \beta)$$

Si nous considérons le système comme un propulseur élémentaire actionné par un moteur qui développe un couple moteur F, destiné à équilibrer la résistance à l'avancement — R de tout le système, dans le sens de l'axe XX, nous pouvons poser :

$$- R + P (\sin \beta - \mu \cos \beta) = 0$$

et comme cette résistance à l'avancement R, se produit à la vitesse V, nous pouvons déduire la valeur de la puissance utile, ou le travail seconde utile, en multipliant la résistance par la vitesse.

$$\mathfrak{T}_u = RV = PV (\sin \beta - \mu \cos \beta).$$

Pareillement, la composante suivant OY constituera, à la dis-

La valeur de μ se compose de deux parties : la première, et la plus importante, dépend de l'incidence, car μ est proportionnel à tang α ; la seconde partie de la résistance est due aux frottements du fluide sur la surface de l'élément propulseur et à la section de cet élément. Cette deuxième partie de la résistance est très faible par rapport à la première; elle dépend de l'épaisseur plus ou moins grande de l'aile et de l'état de sa surface; elle est donc indépendante de α et elle est constante pour la même aile, à toutes les incidences. Nous avons évalué approximativement les valeurs de ces deux parties de μ pour des valeurs croissantes depuis $\mu = 0{,}05$ à $\mu = 1$, en adoptant pour μ la forme $\mu = \text{tang}\ \alpha + 0{,}018$. Cette valeur que nous avons attribuée à la partie de la résistance due aux frottements et à l'épaisseur de l'élément considéré, est évidemment un peu arbitraire, mais nous n'avons aucune donnée positive pour la déduire. Ce n'est que dans un laboratoire d'essais aérodynamiques qu'il

… de la résistance est due aux frottements du fluide sur la surface de l'élément propulseur et à la section de cet élément. Cette deuxième partie de la résistance est très faible par rapport à la première; elle dépend de l'épaisseur plus ou moins grande de l'aile et de l'état de sa surface; elle est donc indépendante de α et elle est constante pour la même aile, à toutes les incidences. Nous avons évalué approximativement les valeurs de ces deux parties de μ pour des valeurs croissantes depuis $\mu = 0,05$ à $\mu = 1$, en adoptant pour μ la forme $\mu = \text{tang}\ \alpha + 0,018$. Cette valeur que nous avons attribuée à la partie de la résistance due aux frottements et à l'épaisseur de l'élément considéré, est évidemment un peu arbitraire, mais nous n'avons aucune donnée positive pour la déduire. Ce n'est que dans un laboratoire d'essais aérodynamiques qu'il serait possible de la déterminer avec précision. Dans tous les cas, l'erreur commise ne doit pas être considérable, et les valeurs des angles d'incidence α inscrites dans la dernière ligne du tableau A ne doivent pas différer sensiblement de la réalité.

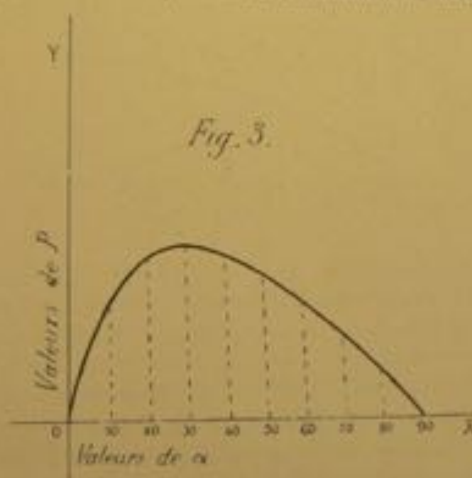


Fig. 3.

A l'inspection du tableau nous voyons que pour obtenir, d'un propulseur hélicoïdal, un rendement avantageux, il faut que ses éléments attaquent l'air sous une incidence la plus faible possible. Nous verrons cependant qu'il y a une limite pour α, au-dessous de laquelle il n'est plus avantageux de descendre.

Pour le démontrer, représentons graphiquement les valeurs croissantes de P et de f, en prenant comme abscisses les valeurs croissantes des incidences depuis $\alpha = 0°$ jusqu'à $\alpha = 90°$.

La courbe, dont les ordonnées représentent les valeurs de P (fig. 3), correspondant à celles de α, commence à zéro, puisque pour $\alpha = 0°$ la valeur de P est nulle, puis elle va en s'élevant jusqu'à un maximum, qui correspond environ à 27° ou 30°, puis descend progressivement pour redevenir 0, lorsque α atteint 90°; à ce moment la force P, perpendiculaire à la trajectoire, s'annule.

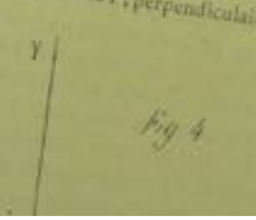


Fig 4

$\rho = \frac{f}{P}$, qui représente le rapport des ordonnées de la [illegible] f (fig. 4) aux ordonnées correspondantes de la courbe des P (fig. 3). Nous voyons que pour $\alpha = 0°$, ρ est infini puisqu'il est le quotient de la valeur de f_0, valeur faible mais positive, par la valeur de P_0 qui est nulle. La courbe des ρ est donc asymptotique à l'axe des Y ; elle descend rapidement jusqu'à une valeur minimum, qui correspond à une valeur de α voisine de 5°, et remonte ensuite pour redevenir asymptotique à une ordonnée passant par $\alpha = 90°$, puisque à ce moment $\rho = \frac{f_{90}}{0}$.

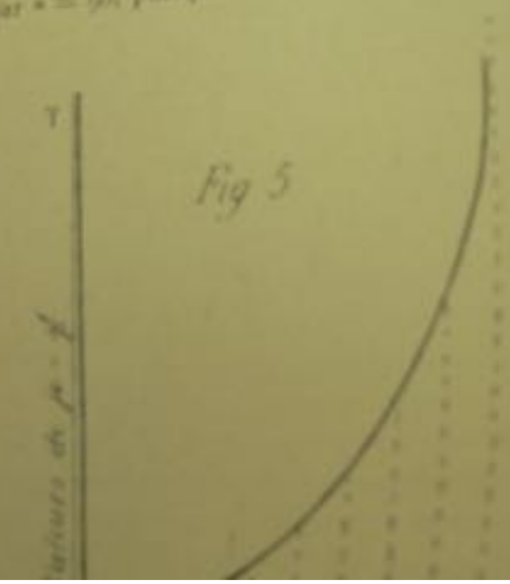


Fig 5

Les lignes horizontales du tableau correspondaient aux incidences nécessaires pour porter les poids en question, à des vitesses croissantes depuis 5, 10, 15.... à 30 mètres à la seconde; ces incidences allaient évidemment en diminuant dans chacune des huit colonnes. Nous avons calculé, de la même manière et dans les mêmes conditions, un deuxième tableau dans lequel étaient rangées les puissances motrices nécessaires pour faire avancer le mètre carré, chargé successivement des poids croissants de 1 à 8 kil., et rencontrant l'air sous les incidences décroissantes, déterminées plus haut, et avec des vitesses croissantes de 5 à 30 mètres. Les deux tableaux étaient absolument similaires, de sorte que chaque valeur d'un tableau correspondait à la valeur similaire de l'autre. En examinant le tableau des puissances motrices, on constatait que, dans chaque colonne, la puissance passait par un minimum, et on trouvait que ce minimum correspondait, dans le premier tableau, pour toutes les vitesses et pour tous les poids portés, toujours à une même incidence très voisine de 2°. En interpolant, on trouvait plus exactement $\alpha = 1°50'$. C'est à cet angle que nous avons donné le nom de *incidence optima*. La valeur numérique de l'incidence optima, ainsi trouvée, dépend évidemment des coeff... les différentes ...

... rangées les puissances motrices nécessaires pour faire avancer le mètre carré, chargé successivement des poids croissants de 1 à 8 kil., et rencontrant l'air sous les incidences décroissantes, déterminées plus haut, et avec des vitesses croissantes de 5 à 30 mètres. Les deux tableaux étaient absolument similaires, de sorte que chaque valeur d'un tableau correspondait à la valeur similaire de l'autre. En examinant le tableau des puissances motrices, on constatait que, dans chaque colonne, la puissance passait par un minimum, et on trouvait que ce minimum correspondait, dans le premier tableau, pour toutes les vitesses et pour tous les poids portés, toujours à une même incidence très voisine de 2°. En interpolant, on trouvait plus exactement $\alpha = 1°50'$. C'est à cet angle que nous avons donné le nom de *incidence optima*. La valeur numérique de l'incidence optima, ainsi trouvée, dépend évidemment des coefficients employés dans les différentes formules adoptées, et sa valeur exacte ne pourra être rigoureusement déterminée que par des essais directs dans un laboratoire aérodynamique. Pour le moment, dans nos calculs ultérieurs, faute de données plus précises, nous adopterons cette valeur de $\alpha = 1°50'$, qui semble, du reste, très voisine de ce qu'elle doit être en réalité. Pour l'eau, nous avions adopté $\alpha = 3°$, ce qui s'est vérifié assez exactement dans le calcul des hélices marines. La très grande rigueur, dans l'appréciation de l'incidence optima, n'a d'ailleurs que peu d'importance, un léger écart dans un sens ou dans l'autre n'influera pas d'une façon très sensible sur le rendement du propulseur, pourvu que l'écart ne soit pas trop grand.

Par ce qui précède, nous voyons que, dans les propulseurs hélicoïdaux aériens, il y a avantage à disposer les éléments constituant la surface du propulseur, de telle façon qu'ils rencontrent les filets gazeux sous une incidence très petite et constante, l'incidence optima $\alpha = 1°50'$, et que, dans ces conditions, l'utilisation du propulseur est maximum.

Voyons maintenant comment nous allons disposer ces éléments le long du rayon ρ, et s'il n'y a pas lieu de prendre, sur ce rayon, une longueur déterminée comprise entre certaines limites.

Pour cela, reprenons l'expression

$$K = \frac{\text{tang}\,\beta - \mu}{(1 + \mu\,\text{tang}\,\beta)\,\text{tang}\,\beta}.$$

Traçons une première courbe en prenant pour abscisses les valeurs croissantes de tang β et assignant à μ une valeur déterminée $\mu = 0{,}05$; les ordonnées de cette courbe seront les valeurs correspondantes de K (fig. 6).

Nous voyons que la courbe est asymptotique à l'axe des Y dans sa partie négative, puisque $K = -\infty$ pour tang $\beta = 0$; la courbe remonte rapidement pour couper l'axe des X ; $K = 0$ pour tang $\beta = \mu = 0{,}05$. Puis la courbe s'élève rapidement pour

Nous voyons que la courbe est asymptotique à l'axe des Y dans sa partie négative, puisque $K = -\infty$ pour $\tang \beta = 0$; la courbe remonte rapidement pour couper l'axe des X : $K = 0$ pour $\tang \beta = \mu = 0,05$. Puis la courbe s'élève rapidement pour passer par un maximum $K_M = 0,905$ correspondant, ainsi que nous l'avons vu, à $\tang \beta_M = \mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = 1,051$, après quoi, elle décroît progressivement, mais lentement, pour devenir asymptotique à l'axe des X pour $\tang \beta = 0$.

Tableau B

μ	$\tang \beta =$	0,5	1	2	3	4	5	Moyenne de K.
0,05	K =	0,878	0,905	0,886	0,853	0,823	0,792	0,855
0,1	K =	0,762	0,818	0,792	0,744	0,696	0,653	0,744
0,2	K =	0,545	0,667	0,643	0,583	0,528	0,480	0,579
0,3	K =		0,538	0,530	0,474	0,421	0,376	0,471
0,4	K =		0,429	0,444	0,394	0,346	0,306	0,388
0,5	K =		0,333	0,375	0,333	0,292	0,257	0,324

Dans le tableau ci-dessus (tableau B), nous avons inscrit dans la première rangée horizontale les valeurs croissantes de et puisque $\alpha = 1°50'$, on aura $\beta_m = 45°55'$ et $\beta_m - \alpha = 44°5'$.

En remplaçant tang β_m et tang $(\beta_m - \alpha)$ par leur valeur numérique, on trouve :

$$H_m = \frac{V}{N} \cdot \frac{1,032}{0,994} = 1,038 \frac{V}{N} \quad \text{et} \quad \text{tang } \beta_m = 1,032.$$

On voit que le pas minimum correspond à une valeur de tang β_m très voisine de l'unité ; il se trouve donc dans la partie de l'aile qui est inclinée sur l'axe d'un angle un peu supérieur à 45°, plus exactement à 45°55', ce qui correspond à une longueur de rayon ρ légèrement supérieure au module ; c'est aussi l'endroit du maximum de rendement.

Pour le tracé des hélices marines, on se sert généralement d'une méthode très commode qui consiste à porter sur l'axe des X une longueur égale au pas divisé par 2π et à mener, du point ainsi déterminé, une série de droites qui viennent couper le rayon, à différentes hauteurs : par exemple au quart, à la moitié, aux trois quarts de sa longueur ; les inclinaisons de ces droites déterminent l'inclinaison de l'aile à ces différentes hauteurs, autrement dit, déterminent le pas de l'hélice correspondant à ces différents points de l'aile.

Cela s'explique facilement par la similitude des triangles ainsi obtenus, avec ceux qui auraient pour côtés, d'une part le pas H, et de l'autre, le développement des cercles dont les rayons seraient respectivement $\frac{1}{4}\rho$, $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{3}{4}\rho$ et qui seraient par conséquent $\frac{1}{2}\pi\rho$, $\pi\rho$ et $\frac{3}{2}\pi\rho$.

Pour les hélices aériennes, nous adopterons un tracé analogue, seulement nous choisirons les points sur le rayon ρ, à des

autrement dit, déterminent le pas de l'hélice correspondant à ces différents points de l'aile.

Cela s'explique facilement par la similitude des triangles ainsi obtenus, avec ceux qui auraient pour côtés, d'une part le pas H, et de l'autre, le développement des cercles dont les rayons seraient respectivement $\frac{1}{4}\rho$, $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{3}{4}\rho$ et qui seraient par conséquent $\frac{1}{2}\pi\rho$, $\pi\rho$ et $\frac{3}{2}\pi\rho$.

Pour les hélices aériennes, nous adopterons un tracé analogue, seulement nous choisirons les points sur le rayon ρ, à des distances de l'axe qui seraient des multiples du module. Nous avons vu que le commencement de l'aile devait correspondre à une valeur du rayon égale à 0,5 M, que le maximum de rendement ainsi que le minimum de pas correspondaient à $\rho = M$, et que l'aile normale avait une longueur de 5 M. Nous subdiviserons donc l'aile (fig. 7) en parties égales correspondant aux valeurs croissantes du module :

$$0{,}5\ M,\ 1\ M,\ 2\ M,\ \ldots\ 5\ M.$$

minimum correspond à une valeur
l'unité; il se trouve donc dans la p
l'axe d'un angle un peu supérieur
ce qui correspond à une
supérieure au module; c'est
ent.

es, on se sert générale
onsiste à porter sur l'axe d
ar 2π et à mener, du poi
s qui viennent couper
ple au quart, à la moi
linaisons de ces droi
s différentes hauteurs
élice correspondant

litude des triangles
côtés, d'une part le
les dont les tr

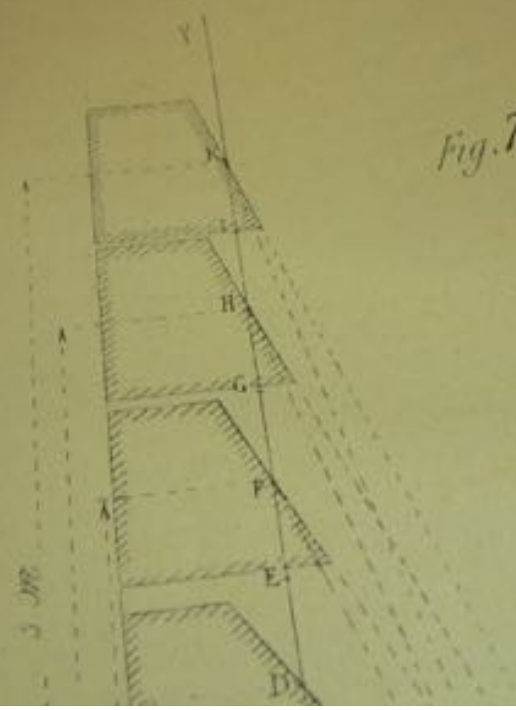
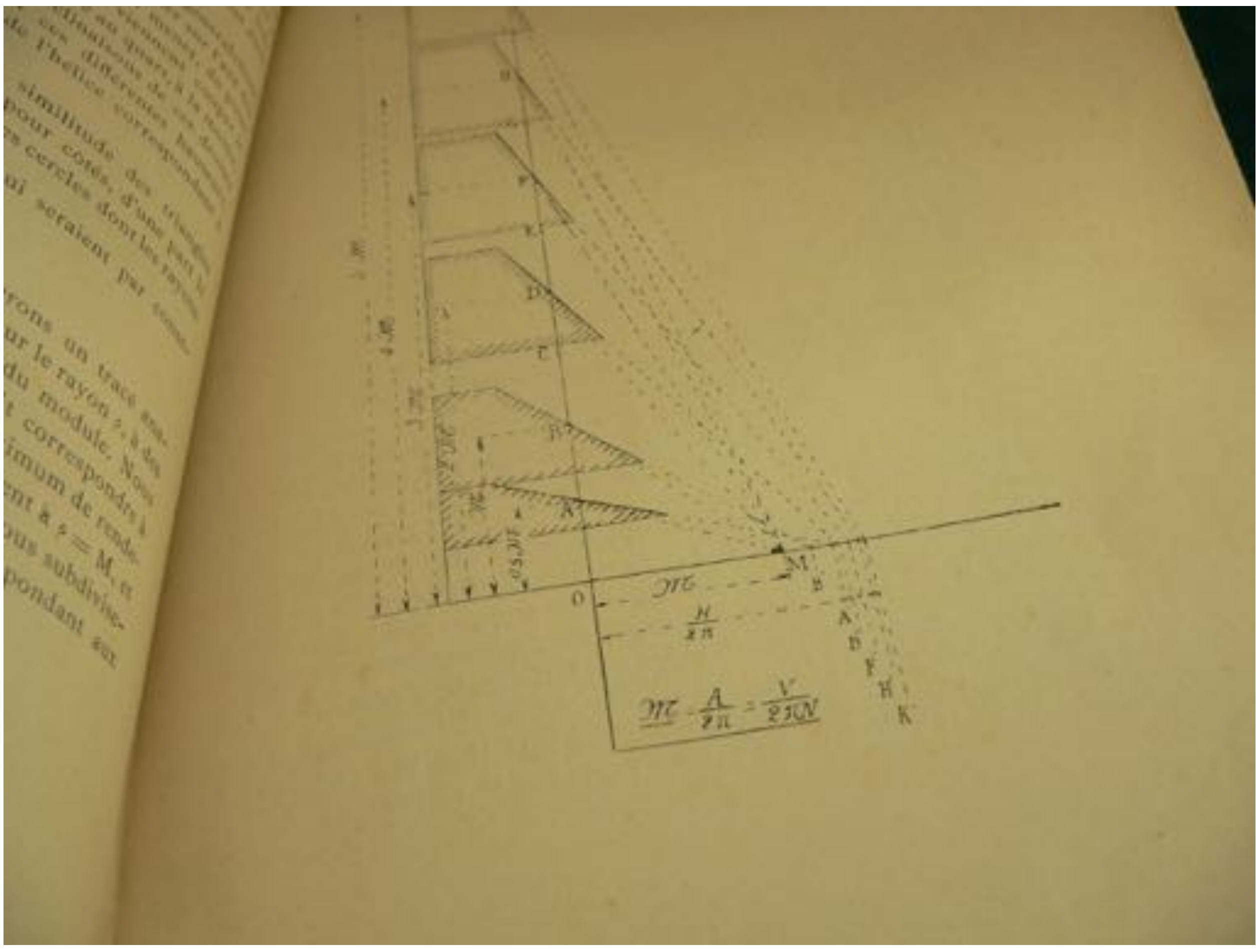


Fig. 7.



c'est-à-dire que les forces f et P croissent dans les mêmes proportions, il est évident alors qu'il y aurait tout avantage à avoir des ailes d'hélices creuses.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé, pour les hélices aériennes : 1° les conditions de leur rendement maximum ; 2° l'incidence à donner aux éléments du propulseur ; 3° les dimensions qu'il convient de donner à la longueur des ailes, et 4° la manière de tracer le pas, ou les pas, des différentes parties de l'aile ; il nous reste encore à déterminer les dimensions transversales de ces ailes, autrement dit la largeur de l'aile aux différents rayons.

Pour cela, reportons-nous aux équations initiales qui servent à déterminer la puissance motrice et la puissance utile nécessaire à propulser notre aéroplane à la vitesse voulue.

Nous avons :

$$\mathfrak{T}_m = PV(\cos\beta + \rho\sin\beta)\operatorname{tang}\beta$$

$$\mathfrak{T}_u = PV(\sin\beta - \rho\cos\beta)$$

En considérant le travail seconde élémentaire on aura :

$$d\mathfrak{T}_m = V(\cos\beta \ldots$$

… dimensions transversales de l'aile ; il … largeur de l'aile aux différents rayons, reportons-nous aux équations initiales qui servent à déterminer la puissance motrice et la puissance utile nécessaire à propulser notre aéroplane à la vitesse voulue.

Nous avons :

$$\mathfrak{T}_m = PV\,(\cos\beta + \rho\sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta$$
$$\mathfrak{T}_u = PV\,(\sin\beta - \rho\cos\beta)$$

En considérant le travail seconde élémentaire on aura :

$$d\mathfrak{T}_m = V\,(\cos\beta + \rho\sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta \,.\, dP,$$
$$d\mathfrak{T}_u = V\,(\sin\beta - \rho\cos\beta)\,dP.$$

Pour une incidence constante α, la poussée utile élémentaire dP, dépendra du carré de la vitesse avec laquelle l'élément en question rencontre les molécules gazeuses, des dimensions de l'élément et d'un coefficient empirique que nous appellerons λ, on aura donc :

$$dP = \lambda\, W^2\, ds,$$

en appelant W la vitesse de l'élément par rapport à l'air et ds sa surface. Ici se présente une question difficile, c'est le choix judicieux du coefficient λ. Il est certain que ce ne sera que par des essais effectués dans un laboratoire aérodynamique qu'il deviendra possible et même facile d'en déterminer rigoureusement la valeur exacte. Voilà la troisième fois que, dans le courant de cette étude, nous nous buttons à des difficultés que seul un laboratoire aérodynamique est en état de résoudre ; on ne saurait par conséquent trop insister sur la nécessité imminente de la création d'un laboratoire de ce genre, car ce n'est que grâce à ce laboratoire que l'on pourra déterminer les valeurs exactes de μ, κ et λ, ces trois paramètres si importants, sans la connaissance exacte desquels, l'établissement, non seulement de bonnes hélices aériennes, mais encore de bons sustentateurs aéroplanes, est absolument impossible; jusque-là il dépend des chances d'une appréciation plus ou moins heureuse. Faute de données plus précises, nous allons adopter pour λ une valeur qui semble assez bien répondre à la réalité, surtout pour les ailes d'hélices qui sont des surfaces étroites et longues attaquant l'air par leur côté le plus long; cette valeur de λ serait, peut-être, un peu forte pour des plans ordinaires, surtout si on s'en rapporte à certaines formules empiriques proposées par le colonel Duchemin, Hutton, Loïsel, M. Eiffel, etc., ou un peu faible, si on en croit d'autres expérimentateurs modernes, tels que Langley, Maxime, le capitaine Ferber et plusieurs autres aviateurs encore. Je pense cependant que nous pourrons adopter, sans trop d'erreur, $\lambda = 0{,}03$, exprimé en kilogrammes, pour un mètre carré d'aile d'hélice, attaquant l'air sous l'incidence optima, à une vitesse de 1 mètre à la seconde. Quant à la vitesse réelle de l'élément, elle sera $W = \dfrac{V}{\cos \beta}$.

Pour déterminer la surface de l'élément du propulseur, nous mètre à la seconde. Quant à la vitesse réelle de l'élément, elle sera $W = \frac{V}{\cos \beta}$.

Pour déterminer la surface de l'élément du propulseur, nous appellerons l la largeur de l'aile et $d\rho$, la hauteur de la tranche considérée le long du rayon ρ ; nous aurons ainsi, pour l'expression de la puissance élémentaire :

$$d\mathfrak{T}_a = \frac{\lambda . V^3 (\sin \beta - \mu \cos \beta) \, l . d\rho}{\cos^2 \beta}$$

$$d\mathfrak{T}_m = \frac{\lambda . V^3 (\cos \beta + \mu \sin \beta) \tan \beta \, l . d\rho}{\cos^2 \beta}$$

et pour la puissance totale, en appelant a le nombre d'ailes :

$$\mathfrak{T}_a = a . \lambda . V^3 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sin \beta - \mu \cos \beta}{\cos^2 \beta} \, l . d\rho,$$

$$\mathfrak{T}_m = a . \lambda . V^3 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\cos \beta + \mu \sin \beta}{\cos \beta} \tan \beta . l . d\rho.$$

sera :

ce qui veut dire que pour une aile norm[ale] ... donne une largeur spécifique constante, cette largeur sp[écifique] sera les 3/4 du module.

Cette valeur de la largeur spécifique peut se déduire aussi du rapport que nous avons admis entre la largeur spécifique et la longueur de l'aile, et qui est de 1/6; comme la longueur de l'aile est 4,5 modules, le sixième qui représente la largeur spécifique sera :

$$L = \frac{4.5}{6} M = 0.75 M.$$

La forme d'aile à largeur spécifique constante L, sera une des meilleures à employer pour les hélices aériennes ; ce sera un rectangle dont la hauteur est 4,5 fois le module, et sa largeur, égale aux 3/4 du module ; l'aile commencera à une distance d'un demi-module de l'axe et son rayon sera de 5 modules.

De cette manière l'aile normale à largeur spécifique constante est complètement déterminée dans tous ses éléments qui, tous, sont exprimés en chiffres abstraits, car ils ont tous le module pour échelle commune.

Pour avoir l'expression générale de la largeur spécifique exprimée en module, il faudra diviser l'expression générale de L par celle M et remplacer l'expression $\frac{FN^2}{aV^2}$ par sa valeur numérique $\frac{1}{2500}$, on aura alors :

$$\frac{L}{M} = \frac{622.7}{\frac{\mu}{4}\left(y_1^4 - y_0^4 - \frac{1}{y_1^4 - y_0^4}\right) + \frac{2}{3}\left(y_1^3 - y_0^3 + \frac{1}{y_1^3 - y_0^3}\right) + 2\left(y_1 - y_0 + \frac{1}{y_1 - y_0}\right) - 2\mu\mathcal{L}\frac{y_1}{y_0}}.$$

Si, d'après cette formule, on calcule les valeurs de $\frac{L}{M}$ en pre- nant $r_0 = 0,5$ et r_1 successivement égal à 5, 6, 7, 8 modules, on trouve les chiffres :

pour	$r_1 = 5$ M	6 M	7 M	8 M
	L = 0,75 M	0,427 M	0,275 M	0,173 M.

Nous voyons que la largeur spécifique, pour $r_1 = 5$, est 0,75 modules, c'est-à-dire 1/6 de la longueur de l'aile ; pour $r_1 = 6$, cette largeur spécifique n'est plus que de $\frac{1}{13}$, pour $r_1 = 7$ elle est $\frac{1}{25}$ et pour $r_1 = 8$ de $\frac{1}{44}$ seulement de la longueur de l'aile. Si donc nous voulions, pour toutes ces ailes, avoir le rapport de 1/6, admis pour l'aile normale, il faudrait augmenter la largeur de la seconde aile dans le rapport de 2,1, de la troisième dans le rapport de 4,1, et de la dernière dans le rapport de 7,3. Par conséquent une hélice ayant un rayon $r_1 = 8$, et dont la largeur d'aile serait 1/6 de la longueur, comme dans les ailes normales, aurait une surface propulsive active 7,3 fois trop grande. Aussi lorsque l'équation de compatibilité montrera que le nombre d'ailes nécessaire a, est supérieur au nombre que l'on désire adopter a', et qu'il faudra multiplier par le rapport $\frac{a}{a'}$, les lar-

$\frac{\;}{44}$ seulement de la longueur de l'aile.

Si donc nous voulions, pour toutes ces ailes, avoir le rapport de 1/6, admis pour l'aile normale, il faudrait augmenter la largeur de la seconde aile dans le rapport de 2,1, de la troisième dans le rapport de 4,1, et de la dernière dans le rapport de 7,3. Par conséquent une hélice ayant un rayon $r_1 = 8$, et dont la largeur d'aile serait 1/6 de la longueur, comme dans les ailes normales, aurait une surface propulsive active 7,3 fois trop grande. Aussi lorsque l'équation de compatibilité montrera que le nombre d'ailes nécessaire a, est supérieur au nombre que l'on désire adopter a', et qu'il faudra multiplier par le rapport $\frac{a}{a'}$, les largeurs d'ailes employées, on pourra toujours trouver un rayon extérieur r_1, supérieur à 5, tel que la largeur spécifique de l'aile, divisée par la longueur de l'aile $\frac{L}{r_1 - r_2}$, et multipliée par le rapport $\frac{a}{a'}$, soit précisément égal à 1/6, rapport admis pour les ailes normales.

Ainsi si le rapport $\frac{a}{a'}$ était par exemple égal à 7,3, il faudrait donner à r_1 une valeur de 8M, et une largeur d'aile égale à $\frac{1}{6}$ de sa longueur ; le nombre a' d'ailes, ainsi modifiées, équivaudrait à a ailes normales, c'est-à-dire absorberait la puissance motrice F, en tournant à N tours, et avançant à la vitesse V.

Reprenons l'expression générale ...

$$l = \frac{13404\ FN}{aV^3 \int_{\tang \beta_0}^{\tang \beta_1} \varphi(\tang \beta) \tang \beta \,.\, d(\tang \beta)} \cdot \frac{\ldots}{1+\ldots}$$

Divisons par $M = \frac{V}{2\pi N}$, les deux membres de l'équation, n...
aurons :

$$\frac{l}{M} = \frac{97290\ F.N^2}{aV^3 \int_{\tang \beta_0}^{\tang \beta_1} \varphi(\tang \beta) \tang \beta \,.\, d \tang \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{1 + \mu \tang \beta} \varphi(\tang \beta) \ldots$$

Nous venons de voir que dans l'équation de compatib...
$\frac{FN^2}{aV^3} = \frac{1}{2500}$, nous pouvons donc remplacer cette expressio...
sa valeur numérique et il vient :

$$\frac{l}{M} = \frac{38,9}{\int^{\tang \beta_1} \ldots (\tang \beta) \tang \beta \,.\, d(\tang \beta)} \cdot \frac{\cos \beta}{1 + \mu \tang \beta}$$

[illegible]

Divisant par $M = \frac{V}{2\pi N}$, les deux membres [illegible]

[illegible]

Nous venons de voir que dans l'équation de compatibilité $\frac{FN^3}{2V^3} = \frac{1}{2500}$, nous pouvons donc remplacer cette expression par sa valeur numérique et il vient :

$$\frac{l}{M} = \frac{38{,}9}{\int_{\tan\beta_0}^{\tan\beta_1} \varphi(\tan\beta)\tan\beta \, . \, d(\tan\beta)} \cdot \frac{\cos\beta}{1+\nu\tan\beta}\,\varphi(\tan\beta),$$

ou, pour abréger la notation, désignant par $\zeta = \tan\beta$, par $\zeta_0 = \tan\beta_0$, par $\zeta_1 = \tan\beta_1$ et $\zeta' = \cos\beta$, on aura :

$$\frac{l}{M} = \frac{38{,}9}{\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \varphi(\zeta) \cdot \zeta \cdot d\zeta} \cdot \frac{\zeta'}{1+\nu\zeta}\,\varphi(\zeta),$$

expression indépendante de la puissance F, du nombre de tours N et de la vitesse V, et ne dépendant que des diverses valeurs de ζ. Il est bien entendu que cette expression n'est vraie qu'à la condition que l'on admette les conditions déterminées par l'équation de compatibilité.

C'est au moyen de cette équation que l'on déterminera le nombre d'ailes nécessaire pour les conditions données. Il pourrait cependant arriver que le nombre d'ailes ainsi calculé diffère de celui qu'il serait possible d'utiliser, dans la pratique, pour le cas donné ; alors, si l'écart des deux nombres était peu important, on se contenterait de multiplier les largeurs d'ailes, que l'on aura calculées au moyen d'une des formules ci-dessus, par le rapport du nombre d'ailes que déterminera l'équation de compatibilité et le nombre d'ailes réel. Nous appellerons ce rapport $q = \frac{a}{a'}$, coefficient de réduction ; en appelant a le nombre d'ailes calculé et a' le nombre réel. Dans le cas où le rapport q deviendrait trop grand, voisin de 2 par exemple, ou surtout supérieur, on ne pourrait plus appliquer ce procédé, car les longueurs d'ailes ainsi obtenues deviendraient plus que le $\frac{1}{3}$ de leur longueur, ce qui pour les ailes d'une hélice aérienne serait exagéré ; il y aurait lieu alors de renoncer à donner à l'aile la longueur que nous avons adoptée pour les ailes normales et qui est de 5M, et d'augmenter cette longueur jusqu'à 6M, 7M, 8M, et peut-être au-delà ; il faudrait dans ce cas calculer les largeurs d'ailes directement par les formules générales, en donnant à z la valeur adoptée. Ainsi, pour le cas du calcul de la largeur spécifique L on prendra :

$$\frac{L}{M} = \frac{1556310 \,.\, F \,.\, N^2}{a \,.\, V^2 \left[\frac{3}{4}\left(y_1^4 - y_2^4 - \frac{1}{y_1^4 - y_2^4}\right) + \frac{2}{3}\left(y_1^3 - y_2^3 + \frac{1}{y_1^3 - y_2^3}\right) + 2\left(y_1 - y_2 + \frac{y_1 - y_2}{1}\right) - 2\log\frac{y_1}{y_2} \right]}.$$

en faisant :

$$y_2 = \sqrt{z_2^2 + 1} + z_2 \quad \text{et} \quad y_1 = \sqrt{z_1^2 + 1} + z_1$$

$$\frac{1}{M} = \frac{15563\,m.F.N^2}{a.V^2\left[\frac{2}{4}\left(y_1^4 - y_0^4 - \frac{1}{y_1^4 - y_0^4}\right) + \frac{2}{3}\left(y_1^3 - y_0^3 + \frac{1}{y_1^3 - y_0^3}\right) + 2\left(y_1 - y_0 + \frac{y_1 - y_0}{1}\right) - 2\log\frac{y_1}{y_0}\right]}$$

en faisant :

$$y_0 = \sqrt{z_0^2 + 1} + z_0 \quad \text{et} \quad y_1 = \sqrt{z_1^2 + 1} + z_1.$$

On augmentera la valeur de z_1 jusqu'à ce que la largeur obtenue L, soit environ $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{5}$ de la longueur de l'aile qui est $z_1 - z_0$; en admettant toujours pour z_0 la valeur $z_0 = 0,5$.

Si l'on voulait donner à l'aile, non pas la forme d'égale largeur spécifique, mais une forme différente, on se servirait de la formule générale :

$$\frac{1}{M} = \frac{97290\,F.N^2}{a.V^2\int_{z_0}^{z_1} \varphi(z).z.dz} \cdot \frac{z}{1 + z_1} \cdot \varphi(z).$$

en choisissant, pour $\varphi(\xi)$, une fonction qui donne à l'aile la forme voulue.

On pourrait aussi, comme nous l'avons montré plus haut, adopter pour ξ_1 une valeur telle que la largeur spécifique correspondante, multipliée par le coefficient de réduction q, soit environ $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{5}$ de la longueur de l'aile. Ainsi, nous avons vu que pour les valeurs de ξ_1 égales à 6M, 7M et 8M, les largeurs spécifiques correspondantes étaient respectivement de $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{25}$ et $\frac{1}{44}$ de la longueur de l'aile ; par conséquent, si on multipliait ces largeurs par un coefficient q, qui serait, pour la première aile, de 2,1, pour la deuxième, de 4,1, et, pour la dernière, de 7,3, on obtiendrait encore une aile dont la largeur ne dépasserait pas $\frac{1}{6}$ de sa longueur.

Nous avons montré, qu'à la condition de satisf[illegible]
[illegible] de compatibilité, on pouvait [illegible]
[illegible]rmule générale [illegible]

... choisissant convenablement la fonction $\varphi(\zeta)$ on ...
... la forme d'aile que l'on désirait.

... allons passer en revue un certain nombre de ces fonc-
... nous donneront des formes d'ailes applicables aux
... aériens, soit directement, soit en combinaison avec
... fonctions.

... plus simples est $\varphi(\zeta) = \zeta + p$, où p est un para-
... arbitraire que l'on peut faire varier à volonté.

... plaçant $\varphi(\zeta)$ par la fonction adoptée, on obtient après

$$\frac{233}{\ldots - \zeta_0^3) + 3p(\zeta_1^2 - \zeta_0^2)} \cdot \frac{\zeta'}{1 + \mu\zeta} \cdot (\zeta + p),$$

898

DES

HÉLICES AÉRIENNES

Théorie générale des Propulseurs hélicoïdaux

et

Méthode de Calcul de ces Propulseurs pour l'air

PAR

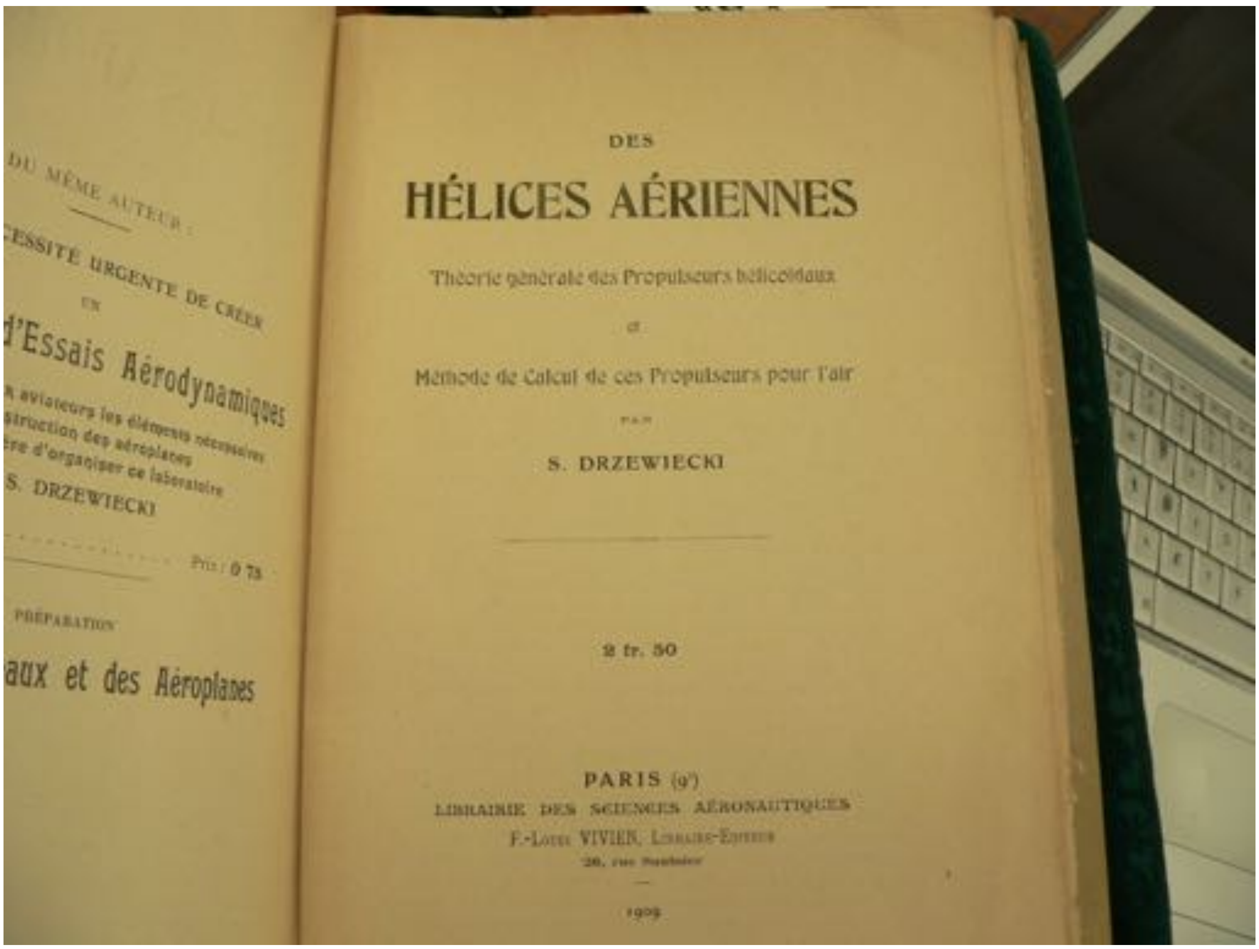
S. DRZEWIECKI

2 fr. 50

PARIS (9e)
LIBRAIRIE DES SCIENCES AÉRONAUTIQUES
F.-Louis VIVIEN, Libraire-Editeur
20, rue Saulnier

—

1909



DU MÊME AUTEUR :

...ESSITÉ URGENTE DE CRÉER

UN

...d'Essais Aérodynamiques

...S. DRZEWIECKI

Prix : 0 75

PRÉPARATION

...aux et des Aéroplanes

DES

HÉLICES AÉRIENNES

Théorie générale des Propulseurs hélicoïdaux

et

Méthode de Calcul de ces Propulseurs pour l'air

PAR

S. DRZEWIECKI

2 fr. 50

PARIS (9e)

LIBRAIRIE DES SCIENCES AÉRONAUTIQUES

F.-Louis VIVIEN, Libraire-Éditeur

20, rue Saulnier

1909

DES HÉLICES AÉRIENNES

La question des hélices en général est fort complexe et assez mal connue au point de vue théorique.

Si, pour les hélices dans l'eau, on est, malgré cela, arrivé à atteindre des utilisations satisfaisantes, c'est uniquement grâce à l'accumulation de nombreuses expériences, de longs tâtonnements, d'essais et de modifications successives, dues souvent au hasard, en un mot, à une pratique de trois quarts de siècle; aussi pour le calcul et le tracé des différents éléments de ces hélices, se sert-on, pour la plupart du temps, de procédés et de formules empiriques isolés, n'ayant entre elles aucun lien d'ensemble donnant une conception générale du phénomène; ces procédés pratiques et ces formules constituent, pour ainsi dire, des traditions d'ateliers et des recettes personnelles, variant avec les constructeurs et les pays. Cette méthode, quelque imparfaite qu'elle puisse paraître, était cependant admissible lorsqu'il s'agissait d'hélices dans l'eau, car un bateau muni d'une hélice, même défectueuse, pouvait, tout de même, naviguer; il avançait lentement, consommait beaucoup de charbon, mais le mauvais rendement de l'hélice n'empêchait pas le bateau de naviguer.

Il n'en est pas de même pour l'hélice aérienne destinée à propulser un aéroplane, car, faute d'une bonne hélice, un aéroplane peut ne pas s'enlever du tout. En effet, le conflit entre le poids des matériaux qui entrent dans la construction d'un aéroplane, et les lois de la résistance de ces matériaux, constitue, pour l'aéroplane, des conditions spéciales qui le mettent, pour ainsi dire, *sur les limites du possible*; il faut, par conséquent, que l'utilisation de tous les éléments de l'appareil, tels que sustentateur, moteur et propulseur, soit aussi élevée que possible, tant au point de vue du poids que de la puissance. Si seulement un de ces éléments ne répondait pas à ces conditions de bonne utilisation, l'aéroplane risquerait de ne pas quitter la terre. De plus, pour les propulseurs aériens nous n'avons pas, comme pour les hélices dans l'eau, l'accumulation d'expériences, de données empiriques, de coefficients, etc., fournis par une longue pratique; c'est pourquoi, pour le calcul des propulseurs aériens, il nous sera indispensable de nous former une conception mécanique exacte du fonctionnement même de l'hélice. En un mot, il nous faudra connaître la théorie générale de l'hélice et avoir une méthode rigoureuse pour calculer tous ses éléments sans exception.

En 1892, j'avais présenté à l'Association technique maritime, une note dans laquelle je proposais une méthode de calcul permettant de déterminer tous les éléments des propulseurs hélicoïdaux. Encouragé par le bienveillant accueil que mes idées ont rencontré auprès d'éminents ingénieurs de la marine et de savants distingués, je cherchais la vérification de ma théorie en calculant, d'après elle, un grand nombre d'hélices existantes et essayées; j'ai eu la satisfaction de constater que les prévisions de mes calculs étaient toujours d'accord avec la réalité et que les bonnes hélices étaient précisément celles qui se rapprochaient le plus du type qu'indiquait le calcul. De plus, j'ai trouvé que certaines particularités observées dans le fonctionnement des hélices, et qui n'avaient pas pu être expliquées par les méthodes ordinaires, se déduisaient, d'une façon simple et rationnelle, lorsqu'on les considérait du point de vue de ma théorie; enfin, cette théorie donnait aussi l'explication logique de certaines formules empiriques employées avec succès dans la pratique. Depuis, il a été construit un nombre très considérable d'hélices, calculées par la méthode que j'ai proposée, et les résultats ont toujours été concordants avec les prévisions du calcul. Toutes ces raisons me donnent aujourd'hui le droit de considérer les principes de cette théorie comme parfaitement justes. Nous allons par conséquent essayer de les appliquer aussi au calcul des hélices aériennes.

en même temps que l'axe XX lui-même soit animé d'un mouvement de translation, dans le sens de sa longueur, avec une vitesse uniforme V.

Fig. 1.

Du fait de la rotation autour de l'axe XX, le point O sera animé, dans le sens OY, d'une vitesse périphérique qui s'exprimera par $2.\pi.N.\rho$, ρ étant la distance du point O à l'axe de rotation XX. D'autre part, du fait de l'avancement longitudinal de l'axe de rotation lui-même, le point O possédera aussi une vitesse V dans le sens parallèle à l'axe XX. La vitesse réelle du point O sera la résultante des deux vitesses $2.\pi.N.\rho$ et V: elle sera donc représentée, en grandeur et en direction, par OT, diagonale du rectangle, dont les côtés sont respectivement $2.\pi.N.\rho$ et V. Cette diagonale représentera aussi la tangente à la trajectoire réelle suivie par le point O; laquelle trajectoire sera une ligne hélicoïdale, résultant de l'enroulement de la diagonale OT

[illegible]

[illegible]

[illegible]

L'Aérodynamique nous apprend [illegible] tance, et varient toutes les deux en même temps, et de la même façon, proportionnellement au carré de la vitesse.

Les deux *composantes* se trouvant dans un plan parallèle au plan XY, leurs projections sur l'axe des Z seront nulles, tandis que leurs projections respectives sur les axes des X et Y seront : pour les X :

$$+\,Op \quad \text{et} \quad -\,Os$$

et pour les Y :

$$-\,Oq \quad \text{et} \quad -\,Or$$

Exprimant ces projections en fonctions de P, de μ et de β, on a :

$$
\begin{aligned}
Op &= P \sin \beta, \\
Os &= f \cos \beta = \mu P \cos \beta, \\
Oq &= P \cos \beta, \\
Or &= f \sin \beta = \mu P \sin \beta.
\end{aligned}
$$

La somme algébrique de ces projections sur l'axe des X sera :

$$Op - Os = P\,(\sin \beta - \mu \cos \beta)$$

et sur l'axe des Y :

$$-\,(Oq + Or) = -\,P\,(\cos \beta + \mu \sin \beta).$$

Si nous considérons le système comme un propulseur élémentaire actionné par un moteur qui développe un couple moteur F, destiné à équilibrer la résistance à l'avancement $-$ R de tout le système, dans le sens de l'axe XX, nous pourrons poser :

$$-\,R + P\,(\sin \beta - \mu \cos \beta) = 0$$

et comme cette résistance à l'avancement R, se produit à la vitesse V, nous pourrons déduire la valeur de la puissance utile, ou le travail seconde utile, en multipliant la résistance par la vitesse.

$$\mathfrak{T}_u = RV = PV\,(\sin \beta - \mu \cos \beta)$$

tance ρ de l'axe de rotation, un couple qui devra équilibrer le couple moteur F, on aura donc :

$$F\rho - P\rho\,(\cos\beta + \varphi\sin\beta) = 0$$

en multipliant par $2\pi N$, qui est la vitesse tangentielle du couple moteur, nous aurons la puissance motrice, ou le travail seconde moteur :

$$\mathfrak{T}_m = 2\pi N\rho F = 2\pi N\rho P\,(\cos\beta + \varphi\sin\beta),$$

mais comme, ainsi que nous l'avons vu :

$$2\pi N\rho = V\,\mathrm{tang}\,\beta,$$

on aura :

$$\mathfrak{T}_m = PV\,(\cos\beta + \varphi\sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta.$$

En divisant l'expression de la puissance utile $\mathfrak{T}_u$ par celle de la puissance motrice $\mathfrak{T}_m$, on aura le coefficient d'utilisation K, de ce propulseur élémentaire ; il sera :

$$K = \frac{\mathfrak{T}_u}{\mathfrak{T}_m} = \frac{\sin\beta - \varphi\cos\beta}{(\cos\beta + \varphi\sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta}$$

divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos\beta$, on aura :

$$K = \frac{\mathrm{tang}\,\beta - \varphi}{(1 + \varphi\,\mathrm{tang}\,\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta}$$

qui détermine la valeur de l'utilisation des différents éléments d'un propulseur, pour différentes valeurs de $\mathrm{tang}\,\beta$.

En donnant à φ la forme

$$\varphi = \mathrm{tang}\,(\mathrm{arc\,tang}\,\varphi),$$

l'expression de K devient, après simplification :

Si les frottements et les résistances dues à l'épaisseur de l'élément AB n'existaient pas et que le rapport $\nu = \frac{f}{p}$ se réduisait à tang α, l'utilisation K serait exprimée par :

$$K = \frac{\operatorname{tang}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tang} \beta}$$

Ce qui montre que cette utilisation serait d'autant plus grande que l'angle α serait plus petit, et que K deviendrait égal à l'unité pour $\alpha = 0$.

Reprenons l'expression générale de K :

$$K = \frac{\operatorname{tang} \beta - \nu}{1 + \nu \operatorname{tang} \beta \cdot \operatorname{tang} \beta}$$

nous y voyons que, pour les valeurs de tang β inférieures à ν, le coefficient K est négatif ; qu'il est nul pour tang $\beta = \nu$, et que, pour des valeurs croissantes de tang β, il augmente, passe par un maximum et décroît ensuite jusqu'à 0, lorsque tang β tend vers l'infini.

Pour déterminer la valeur de tang β, qui rend maximum la valeur de K, égalons à zéro la dérivée première de l'expression ; après simplification on trouve :

$$\operatorname{tang}^2 \beta - 2\nu \operatorname{tang} \beta - 1 = 0.$$

Résolvant cette équation et ne prenant que la valeur positive de tang β, nous trouvons que la valeur de tang β_a qui rend K maximum, est :

$$\operatorname{tang} \beta_a = \nu + \sqrt{\nu^2 + 1}$$

Substituant cette valeur dans l'expression de K, nous trouvons pour la valeur de K_β maximum :

$$K_\beta = \frac{1}{(\nu + \sqrt{\nu^2 + 1})^2}$$

Le dénominateur est précisément le carré de tang β_a, donc :

$$K_\beta = \frac{1}{\operatorname{tang} \beta_a}$$

Comme le coefficient K se rapproche de l'unité, la valeur de

$\sin^2$ [illegible] devra être voisin de 1, et par conséquent aussi tang [illegible]; ceci montre que le maximum de rendement du propulseur correspondra à la partie de l'aile avoisinant tang β = 1, qui donne [illegible]. Cette partie est voisine de la base de l'aile. Cela prouve que ce n'est pas l'extrémité de l'aile, comme on le croit généralement, mais bien sa base, qui est la partie du propulseur donnant la meilleure utilisation.

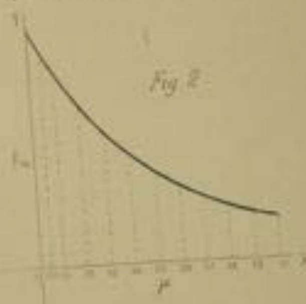


Fig. 2

Traçons la courbe des valeurs de K_a en faisant varier x depuis 0 jusqu'à 1, par des augmentations de 0,1 (fig. 2); les ordonnées de cette courbe sont inscrites dans le tableau ci-dessous (tableau A) en dessous des valeurs correspondantes de x et des valeurs [illegible] qui lui correspondent. Nous voyons que K_a décroît très rapidement avec l'augmentation de x et qu'il est, par conséquent, extrêmement important pour les propulseurs que [illegible] et par suite aussi [illegible], soient les plus petits possible.

Tableau A

x =	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
[illegible] =	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
K_a =	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,272

La valeur de μ se compose de deux parties : la première, et la plus importante, dépend de l'incidence, car μ est proportionnel à tang α ; la seconde partie de la résistance est due aux frottements du fluide sur la surface de l'élément propulseur et à la section de cet élément. Cette deuxième partie de la résistance est très faible par rapport à la première; elle dépend de l'épaisseur plus ou moins grande de l'aile et de l'état de sa surface; elle est donc indépendante de α et elle est constante pour la même aile, à toutes les incidences. Nous avons évalué approximativement les valeurs de ces deux parties de μ pour des valeurs croissantes depuis $\mu = 0{,}05$ à $\mu = 1$, en adoptant pour μ la forme $\mu = \text{tang}\,\alpha + 0{,}018$. Cette valeur que nous avons attribuée à la partie de la résistance due aux frottements et à l'épaisseur de l'élément considéré, est évidemment un peu arbitraire, mais nous n'avons aucune donnée positive pour la déduire. Ce n'est que dans un laboratoire d'essais aérodynamiques qu'il serait possible de la déterminer avec précision. Dans tous les cas, l'erreur commise ne doit pas être considérable, et les valeurs des angles d'incidence α inscrites dans la dernière ligne du tableau A ne doivent pas différer sensiblement de la réalité.

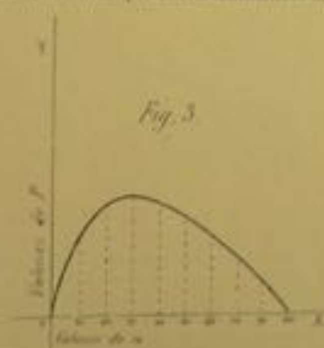
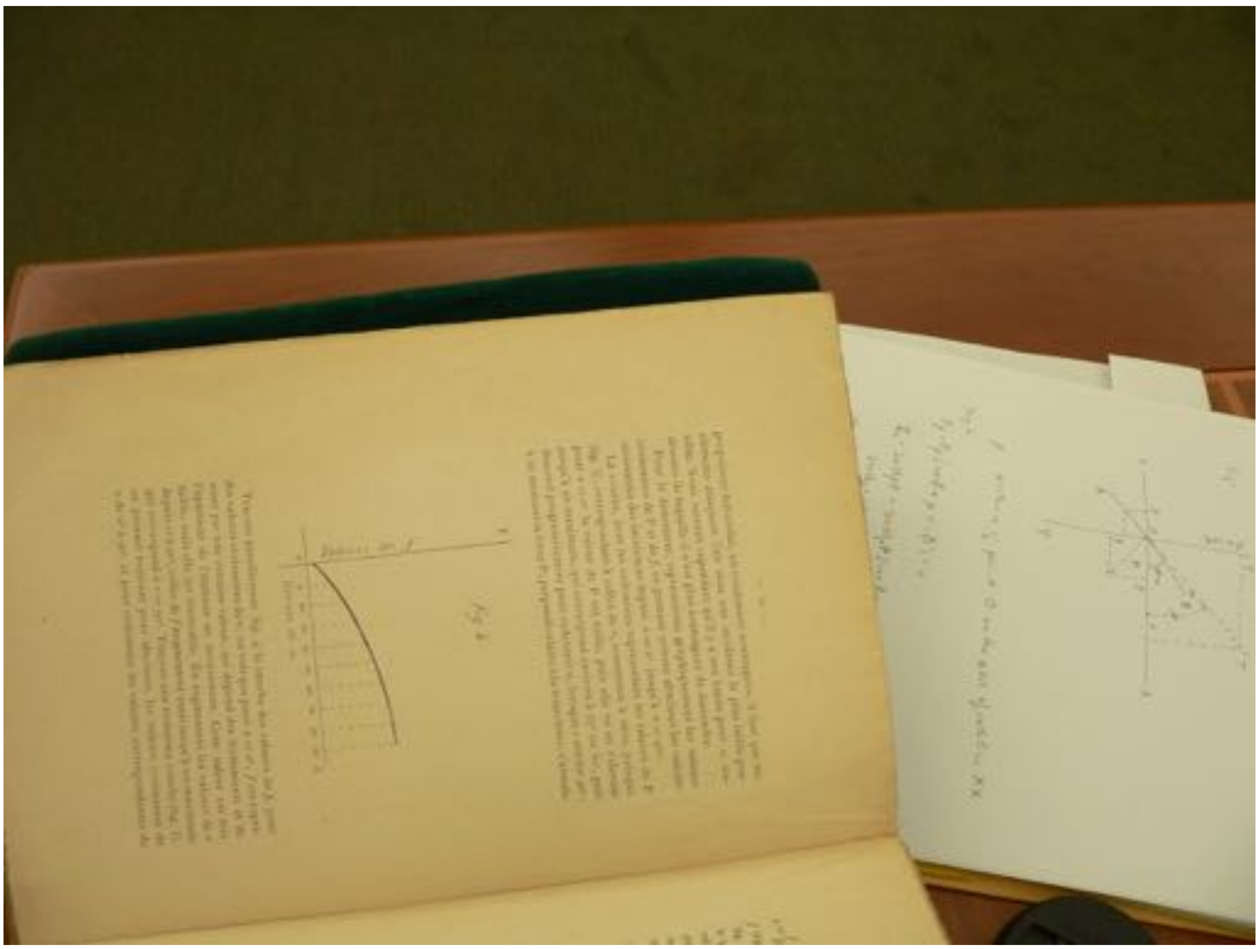
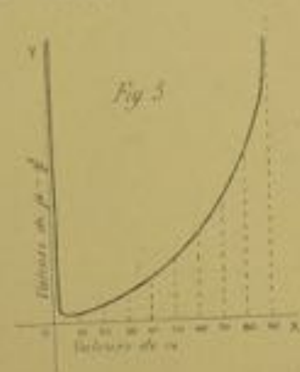


Fig. 3

A l'inspection du tableau nous voyons que pour obtenir, d'un



$y = \frac{f}{P}$, qui représente le rapport des ordonnées de la courbe des f (fig. 4) aux ordonnées correspondantes de la courbe des P (fig. 3). Nous voyons que pour $\alpha = 0°$, y est infini puisqu'il est le quotient de la valeur de f_0, valeur faible mais positive, par la valeur de P_0 qui est nulle. La courbe des y est donc asymptotique à l'axe des Y ; elle descend rapidement jusqu'à une valeur minimum, qui correspond à une valeur de α voisine de 5°, et remonte ensuite pour redevenir asymptotique à une ordonnée passant par $\alpha = 90°$, puisque à ce moment $y = \frac{f_{90}}{0}$.



Cette valeur minimum pour α, voisine de 5°, a été déterminée par nous dans une étude antérieure datant de 1887. Pour cela, en nous basant sur les formules de Duchemin, nous avons calculé les différentes incidences sous lesquelles un mètre carré de surface portante pourrait soutenir en l'air un poids donné, en avançant horizontalement avec une vitesse déterminée ; ensuite nous avons dressé un tableau, de huit colonnes, dans lequel chaque colonne correspondant à un poids porté de 1, 2, 3 ... à 8 kil.

Les lignes horizontales du tableau correspondaient aux incidences nécessaires pour porter les poids en question, à des vitesses croissantes depuis 5, 10, 15.... à 30 mètres à la seconde ; ces incidences allaient évidemment en diminuant dans chacune des huit colonnes. Nous avons calculé, de la même manière et dans les mêmes conditions, un deuxième tableau dans lequel étaient rangées les puissances motrices nécessaires pour faire avancer le mètre carré, chargé successivement des poids croissants de 1 à 8 kil., et rencontrant l'air sous les incidences décroissantes, déterminées plus haut, et avec des vitesses croissantes de 5 à 30 mètres. Les deux tableaux étaient absolument similaires, de sorte que chaque valeur d'un tableau correspondait à la valeur similaire de l'autre. En examinant le tableau des puissances motrices, on constatait que, dans chaque colonne, la puissance passait par un minimum, et on trouvait que ce minimum correspondait, dans le premier tableau, pour toutes les vitesses et pour tous les poids portés, toujours à une même incidence très voisine de 2°. En interpolant, on trouvait plus exactement $\alpha = 1°50'$. C'est à cet angle que nous avons donné le nom de *incidence optima*. La valeur numérique de l'incidence optima, ainsi trouvée, dépend évidemment des coefficients employés dans les différentes formules adoptées, et sa valeur exacte ne pourra être rigoureusement déterminée que par des essais directs dans un laboratoire aérodynamique. Pour le moment, dans nos calculs ultérieurs, faute de données plus précises, nous adopterons cette valeur de $\alpha = 1°50'$, qui semble, du reste, très voisine de ce qu'elle doit être en réalité. Pour l'eau, nous avions adopté $\alpha = 3°$, ce qui s'est vérifié assez exactement dans le calcul des hélices marines. La très grande rigueur, dans l'appréciation de l'incidence optima, n'a d'ailleurs que peu d'importance, un léger écart dans un sens ou dans l'autre n'influera pas d'une façon très sensible sur le rendement du propulseur, pourvu que l'écart ne soit pas trop grand.

Par ce qui précède, nous voyons que, dans les propulseurs hélicoïdaux aériens, il y a avantage à disposer les éléments constituant la surface du propulseur, de telle façon qu'ils rencontrent les filets gazeux sous une incidence très petite et constante, l'incidence optima $\alpha = 1°50'$, et que, dans ces conditions, l'utilisation du propulseur est maximum.

Voyons maintenant comment nous allons disposer ces éléments le long du rayon r, et s'il n'y a pas lieu de prendre, sur ce rayon, une longueur déterminée comprise entre certaines limites.

Pour cela, reprenons l'expression

$$K = \frac{\text{tang}\,\beta - \mu}{(1 + \mu\,\text{tang}\,\beta)\,\text{tang}\,\beta}$$

Traçons une première courbe en prenant pour abscisses les valeurs croissantes de tang β et assignant à μ une valeur déterminée $\mu = 0{,}05$; les ordonnées de cette courbe seront les valeurs correspondantes de K (fig. 6).

Nous voyons que la courbe est asymptotique à l'axe des Y dans sa partie négative, puisque $K = -\infty$ pour tang $\beta = 0$; la courbe remonte rapidement pour couper l'axe des X : $K = 0$ pour tang $\beta = \mu = 0{,}05$. Puis la courbe s'élève rapidement pour passer par un maximum $K_\alpha = 0{,}905$ correspondant, ainsi que nous l'avons vu, à tang $\beta_\alpha = \mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = 1{,}051$, après quoi, elle décroît progressivement, mais lentement, pour devenir asymptotique à l'axe des X pour tang $\beta = \infty$.

Tableau B

μ	tang β =	0,5	1	2	3	4	5	Maximum de K
0,05	K =	0,875	0,905	0,886	0,853	0,813	[illegible]	[illegible]
0,1	K =	0,750	0,818	0,704	0,744	0,696	0,653	0,744
0,2	K =	0,545	0,667	0,643	0,583	0,528	0,480	0,529
0,3	K =		0,538	0,550	0,474	0,421	0,376	0,423
0,4	K =		0,489	0,444	0,394	0,346	0,306	[illegible]
0,5	K =		0,333	0,393	0,333	0,292	0,255	0,324

Dans le tableau ci-dessus (tableau B), nous avons inscrit dans la première rangée horizontale les valeurs croissantes de

[illegible]

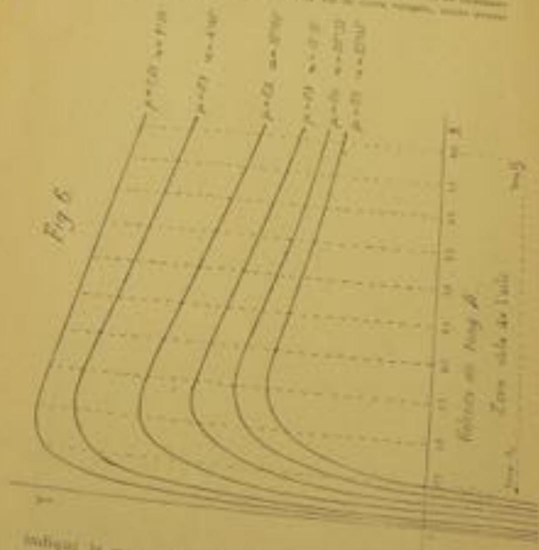


Fig. 6

indique la moyenne des valeurs des K de cette ligne ; cette moyenne est K = 0,655. Ce chiffre indique le rendement moyen que l'on pourrait obtenir d'un propulseur hélicoïdal, dont les

cette ligne : cette
rendement moyen
hélicoïdal, dont les

[illegible] l'incidence [illegible] depuis [illegible] jusqu'à [illegible]

Nous [illegible] la partie du propulseur qui se trouve entre l'axe de rotation et la valeur [illegible] ; ainsi, la surface propulsive de l'aile ne [illegible] qu'à partir d'un rayon correspondant à une valeur de tang β égale à 0,5. Pareillement, la longueur de l'aile ne doit pas dépasser une valeur correspondant à tang β = 5, car au-delà de cette longueur, les valeurs de K diminuent sensiblement. Nous appellerons r_0 et r_5 les rayons qui correspondront à :

$$\text{tang}\,\beta_0 = 0,5 \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\beta_5 = 5,$$

de sorte que nous pourrons écrire :

$$r_0 = \frac{V}{2\pi N}\,\text{tang}\,\beta_0 = 0,5\,\frac{V}{2\pi N}$$

et

$$r_5 = \frac{V}{2\pi N}\,\text{tang}\,\beta_5 = 5\,\frac{V}{2\pi N}$$

L'expression $\frac{V}{N}$ est, ce qu'on appelle, *l'avance par tour* du propulseur et nous la désignerons par $A = \frac{V}{N}$; nous appellerons *Module* l'avance A, divisée par 2π, nous le désignerons par :

$$M = \frac{V}{2\pi N} = \frac{A}{2\pi}.$$

Cette expression jouera un rôle important dans la suite, c'est pourquoi nous la déterminons dès maintenant. En remplaçant dans les expressions de r_0 et r_5, qui définissent le rayon du moyeu et celui de l'aile du propulseur, $\frac{V}{2\pi N}$, par le module M, nous aurons :

$$r_0 = 0,5M \quad \text{et} \quad r_5 = 5M.$$

Ceci montre que, pour une aile d'hélice aérienne d'un rendement moyen, K = 0,855, et que nous appellerons *aile normale*, le commencement de l'aile correspondra à une longueur de rayon égale à la moitié du module, et la longueur totale de l'aile sera égale à 5 modules.

En examinant les chiffres du tableau ci-dessus, on se demande pourquoi ne se bornerait-on pas à utiliser seulement la partie de l'aile comprise entre les limites $\operatorname{tang} \beta_0 = 0,3$ et $\operatorname{tang} \beta_1 = 3$ ou 4 par exemple, pour lesquelles la moyenne des rendements serait plus élevée ; ce sont en effet les limites qui ont été admises pour les ailes normales des hélices marines, mais pour les hélices aériennes ces limites seraient trop restreintes, car il est indispensable pour les propulseurs aériens de disposer d'une surface propulsive considérable ; de plus, comme la forme des ailes devra être aussi plus étroite que celle des hélices marines, en arrêtant la longueur de rayon à 3 modules, ou même à 4, il faudrait donner aux hélices un nombre trop considérable d'ailes pour réaliser la surface propulsive nécessaire. C'est pourquoi nous avons été amenés à adopter pour l'aile normale dans l'air $r_1 = 5$ M.

Dans la pratique, il pourra arriver que cette longueur admise pour l'aile normale soit encore insuffisante, par exemple pour les hélices tournant très rapidement, et pour lesquelles l'avance par tour est faible, par suite de quoi le module M sera aussi très petit ; il faudra alors, pour éviter l'emploi d'un trop grand nombre d'ailes, pousser la valeur de r_1 jusqu'à 6, 7 et même 8 modules. Tandis qu'au contraire, rares seront les cas où l'on aura occasion de descendre au-dessous de $r_1 = 5$ M.

Dans tout ce qui va suivre nous appellerons toujours *aile normale*, une aile de propulseur dont les éléments attaquent l'air sous l'incidence optima $\alpha = 1°50'$ et dont les longueurs d'ailes sont déterminées par les relations :

$$r_0 = 0,5 \text{ M} \quad \text{et} \quad r_1 = 5 \text{ M}.$$

Dans le courant de la présente étude nous aurons très fréquemment l'occasion d'avoir à faire à l'aile normale, qui a été établie sur la base d'une certaine convention, ainsi que nous venons de le voir. Cette convention a l'immense avantage de déterminer immédiatement et complètement tous les éléments de l'aile normale, au moyen du module seulement, et de plus, les conditions adoptées dans cette convention se rapprochent beaucoup de celles qu'on rencontre généralement dans la pratique des hélices aériennes, ce qui fait que, dans la plupart des cas, l'aile normale pourra être appliquée telle que, sans modification aucune.

Nous venons de voir que, pour l'aile normale, le rendement moyen peut atteindre la valeur K = 0,855 lorsque $\alpha = 0{,}05$, mais qu'il décroît rapidement avec l'augmentation de α.

Pour montrer d'une façon saisissante la chute rapide du coefficient moyen d'utilisation avec l'augmentation de α, et par conséquent de l'incidence α, nous avons tracé les courbes de ces utilisations, en prenant des valeurs de α croissantes de 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 et 0,5. Nous avons groupé ces courbes sur la même figure que la première, celle qui correspond à $\alpha = 0{,}05$ (fig. 6). En outre, les ordonnées de toutes ces courbes ont été inscrites dans le tableau B en regard de la valeur correspondante de α ; dans la dernière colonne sont rangées les valeurs moyennes de l'utilisation pour chaque cas.

On peut se rendre facilement compte de la chute rapide de ce coefficient moyen avec l'augmentation de α ; le coefficient moyen qui est de 0,855 lorsque $\alpha = 0{,}05$, tombe à 0,323 pour $\alpha = 0{,}5$. Comme c'est la valeur de tang α qui influence principalement celle de α, il y a un très grand intérêt à disposer l'aile de façon à ce que l'incidence soit la plus petite possible. Il n'y a jamais à craindre que cette incidence soit trop faible, même si elle est inférieure à 1°30 ; car dans ce cas, le couple résistant de l'hélice devenant inférieur au couple moteur prévu, le moteur s'emballera ; il s'en suivra que le nombre de tours de l'hélice, étant plus grand que la normale, l'avance par tour diminuera, ce qui aura pour résultat d'augmenter l'incidence, jusqu'au moment où elle atteindra sa valeur la plus utile, c'est alors que le couple moteur équilibrera le couple résistant. Pour une hélice bien calculée, cet équilibre se fera automatiquement pour l'incidence optima.

Dans ce qui précède, nous avons appris à déterminer l'angle d'attaque et la longueur de l'aile nécessaires pour obtenir le maximum de rendement du propulseur ; nous avons vu que pour cela, il fallait ranger le long du rayon r, entre certaines limites résultante de la juxtaposition des éléments AB le long du rayon r, pour des valeurs croissantes de $\operatorname{tang}\beta$, est une surface hélicoïdale dont le pas est :

$$H = \frac{2\pi r}{\operatorname{tang}(\beta - \alpha)},$$

mais comme :

$$\operatorname{tang}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\alpha},$$

on a :

$$H = \frac{2\pi r\,(1 + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\alpha)}{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha},$$

remplaçant $2\pi r$ par sa valeur :

$$\frac{V \operatorname{tang}\beta}{N},$$

on obtient :

$$H = \frac{V}{N}\,\frac{(1 + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\alpha)\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha}.$$

Remarquons en passant que, dans cette expression, la fonction qui multiplie l'avance $\frac{V}{N}$, est précisément l'inverse de celle que nous avions trouvée pour K, et dans laquelle α serait remplacé par $\operatorname{tang}\alpha$; ceci montre que, si les frottements n'existaient pas et que α se réduise à $\operatorname{tang}\alpha$, on aurait :

$$H = \frac{V}{N}\cdot\frac{1}{K},$$

ou bien :

$$K = \frac{A}{H},$$

qui montre que le rendement serait mesuré par le rapport de l'avance au pas.

En examinant la valeur du pas :

$$H = \frac{V}{N}\,\frac{(1 + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\alpha)\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha},$$

$$\text{tang}(\beta - \varphi) = \frac{\ldots}{1 + \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\varphi}$$

on a :

$$H = \frac{2\pi\rho\,(1 + \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\varphi)}{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\varphi},$$

remplaçant $2\pi\rho$ par sa valeur :

$$\frac{V\,\text{tang}\,\beta}{N},$$

on obtient :

$$H = \frac{V}{N}\,\frac{(1 + \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\varphi)\,\text{tang}\,\beta}{(\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\varphi)}.$$

Remarquons en passant que, dans cette expression, la fonction qui multiplie l'avance $\frac{V}{N}$, est précisément l'inverse de celle que nous avions trouvée pour K, et dans laquelle φ serait remplacé par $\text{tang}\,\varphi$; ceci montre que, si les frottements n'existaient pas et que φ se réduise à $\text{tang}\,\varphi$, on aurait :

$$H = \frac{V}{N} \cdot \frac{1}{K},$$

ou bien :

$$K = \frac{A}{H},$$

qui montre que le rendement serait mesuré par le rapport de l'avance au pas.

En examinant la valeur du pas :

$$H = \frac{V}{N}\,\frac{(1 - \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\varphi)\,\text{tang}\,\beta}{(\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\varphi)},$$

nous voyons que ce pas est un pas variable ; qu'il est infini pour

$\mathrm{tang}\,\beta = \mathrm{tang}\,\alpha$, ce qui a lieu lorsque $\beta = \alpha$, au voisinage de l'axe de rotation. A mesure que $\mathrm{tang}\,\beta$ augmente, la valeur de H diminue, elle passe par un minimum que l'on détermine en égalant à zéro la dérivée première de la fonction ; on trouve ainsi après simplification :

$$H_m = \frac{V}{N}(\mathrm{tang}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{tang}^2\,\alpha + 1})^2,$$

correspondant à une valeur de :

$$\mathrm{tang}\,\beta_m = \mathrm{tang}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{tang}^2\,\alpha + 1}.$$

Pour $\mathrm{tang}\,\beta = \infty$, le pas deviendrait infini.

Ici encore la similitude d'expression est *frappante* entre le minimum de pas H_m, et l'inverse du rendement maximum K_α, que nous avons déduit plus haut. Dans ces deux expressions c'est la même valeur de $\mathrm{tang}\,\beta$ qui les rend, l'un minimum, l'autre maximum, avec cette seule différence que $\mathrm{tang}\,\alpha$ y est remplacé par φ.

La valeur du pas minimum peut s'exprimer en fonction de $\mathrm{tang}\,\beta_m$ qui le rend minimum :

$$H_m = \frac{V}{N}\,.\,\mathrm{tang}^2\,\beta_m,$$

mais, comme d'autre part :

$$H_m = \frac{V}{N}\,.\,\frac{\mathrm{tang}\,\beta_m}{\mathrm{tang}\,(\beta_m - \alpha)},$$

donc :

$$\mathrm{tang}^2\,\beta_m = \frac{\mathrm{tang}\,\beta_m}{\mathrm{tang}\,(\beta_m - \alpha)},$$

ou bien :

$$\mathrm{tang}\,\beta_m\,.\,\mathrm{tang}\,(\beta_m - \alpha) = 1.$$

On peut en déduire que $\mathrm{tang}\,\beta_m$ est supérieur à l'unité précisément de la même quantité que $\mathrm{tang}\,(\beta_m - \alpha)$ est inférieure à 1, par conséquent :

$$\beta_m = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \beta_m - \alpha = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

et puisque [illegible], on aura $\beta_m = [illegible]$ et $\beta_m - \varepsilon = [illegible]$.

En remplaçant tang β_m et tang $(\beta_m - \varepsilon)$ par leur valeur numérique, on trouve :

$$H_m = \frac{V}{N}\,\frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible]\,\frac{V}{N} \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\beta_m = [illegible]$$

On voit que le pas minimum correspond à une valeur de tang β_m très voisine de l'unité ; il se trouve donc dans la partie de l'aile qui est inclinée sur l'axe d'un angle un peu supérieur à 45°, plus exactement à 45°55', ce qui correspond à une longueur de rayon r légèrement supérieure au module ; c'est aussi l'endroit du maximum de rendement.

Pour le tracé des hélices marines, on se sert généralement d'une méthode très commode qui consiste à porter sur l'axe des X une longueur égale au pas divisé par 2π et à mener, du point ainsi déterminé, une série de droites qui viennent couper le rayon, à différentes hauteurs : par exemple au quart, à la moitié, aux trois quarts de sa longueur ; les inclinaisons de ces droites déterminent l'inclinaison de l'aile à ces différentes hauteurs, autrement dit, déterminent le pas de l'hélice correspondant à ces différents points de l'aile.

Cela s'explique facilement par la similitude des triangles ainsi obtenus, avec ceux qui auraient pour côtés, d'une part le pas H, et de l'autre, le développement des cercles dont les rayons seraient respectivement $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{2}r$, $\frac{3}{4}r$ et qui seraient par conséquent $\frac{1}{2}\pi r$, πr et $\frac{3}{2}\pi r$.

Pour les hélices aériennes, nous adopterons un tracé analogue, seulement nous choisirons les points sur le rayon r, à des distances de l'axe qui seraient des multiples du module. Nous avons vu que le commencement de l'aile devait correspondre à une valeur du rayon égale à 0,5 M, que le maximum de rendement ainsi que le minimum de pas correspondaient à $r =$ M, et que l'aile normale avait une longueur de 5 M. Nous subdiviserons donc l'aile (fig. 7) en parties égales correspondant aux valeurs croissantes du module :

$$0{,}5\ \text{M},\ 1\ \text{M},\ 2\ \text{M},\ \ldots\ 5\ \text{M}.$$

consiste à porter sur l'axe des
par zz et à mesure, du point
qui viennent couper le
simple au quart, à la moitié,
inclinaisons de ces droites
les différentes hauteurs,
hélice correspondant à

titude des triangles
côtés, d'une part le
cles dont les rayons
raient par consé-

un tracé ana-
rayon r, à des
odule. Nous
respondre à
n de rende-
s = M, et
ubdivise-
dant aux

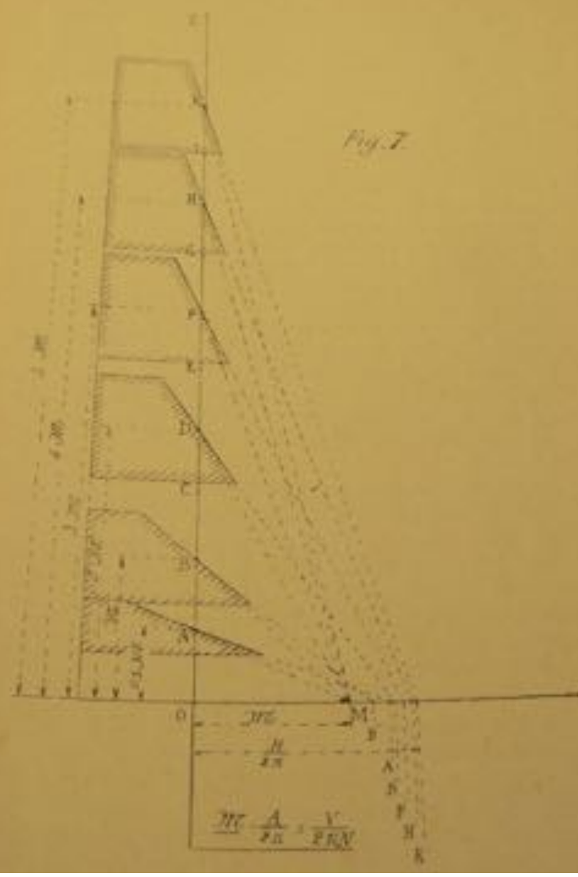


Fig. 7

Les points A, B, C, D, E, ..., K, ainsi déterminés, nous les joindrons au point M, pris sur l'axe de rotation, à la distance de l'origine de l'aile égale au module ; les directions MA, MB, MC, ..., MK, représenteront les tangentes aux trajectoires hélicoïdales que décrivent dans l'air les différents points A, B, C, ..., K. En ces différents points, la surface de l'aile fera, avec ces directions, un angle d'incidence $\alpha =$ [illegible], et les différentes sections de l'aile, en ces points, seront représentées par des éléments rectilignes qui seront inclinés sur les lignes MA, MB, ..., MK, de l'angle α. Ces éléments rectilignes prolongés viendront couper l'axe OX en différents points, dont la distance à l'origine O, sera pour chaque point, égale au pas divisé par 2π. Pour une hélice à pas constant, tous ces points se confondent en un seul, puisque le pas est le même pour tous les points du rayon, mais alors les incidences sont variables et vont en diminuant vers l'extrémité de l'aile ; tandis que pour l'aile à incidence constante, c'est, au contraire, le pas qui va en augmentant vers l'extrémité de l'aile. Toutes les valeurs des pas, divisées par 2π, que nous avons adoptées pour notre aile, à angle d'incidence constant, peuvent être calculées une fois pour toutes, car elles correspondent toujours aux mêmes subdivisions du rayon ; de plus, elles peuvent être exprimées en fonction du module. Ces valeurs s'obtiennent de la façon suivante. Nous avons vu que :

$$H = \frac{V}{N} \frac{\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,(\beta - \alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{H}{2\pi} = \frac{V}{2\pi N} \frac{\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,(\beta - \alpha)};$$

mais comme :

$$\frac{V}{2\pi N} = M,$$

on aura :

$$\frac{H}{2\pi} = \frac{\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,(\beta - \alpha)} M.$$

On pourra donc calculer, une fois pour toutes, les valeurs de tang $(\beta - \alpha)$ correspondant aux valeurs croissantes de tang β, depuis tang $\beta = 0,5$, 1, 2, 3, ..., 5, et diviser les deuxièmes par les premières. Dans le tableau de l'appendice (tableau C), ces valeurs ont été calculées jusqu'à tang $\beta_1 = 8$, car il pourra

[illegible]

En continuant le tableau, nous verrons que pour les valeurs croissantes de tang β, les valeurs de $\frac{H}{2\pi}$ commencent par diminuer, depuis $\frac{H}{2\pi} = 1{,}083$ M, pour tang $\beta_0 = 0{,}5$, jusqu'à une valeur minimum 1,066 M pour tang $\beta = 1$, puis augmentent progressivement avec l'augmentation de tang β. Nous voyons aussi que $\frac{H}{2\pi}$ est exprimé en fonction du module. D'autre part, le module M représente lui-même l'avance A, divisée par 2π, on pourra donc, pour chaque valeur de tang β, prendre la valeur correspondante H en fonction de l'avance, et écrire successivement $H = 1{,}083$ A, $H = 1{,}066$ A, et ainsi de suite; on voit par là que le pas dépasse l'avance d'une quantité qui est respectivement 8,3 o/o, 6,6 o/o de cette avance; c'est cet excédent du pas sur l'avance qui constitue le recul de l'aile, pour le point de l'aile considéré. Pour les ailes à incidence constante, et par conséquent à pas variable, ce recul est variable, il commence par diminuer du moyeu à la longueur de l'aile qui est égale au module, puis il croît continuellement jusqu'à l'extrémité de l'aile.

Au contraire, pour les hélices à pas constant et à angle d'attaque variable, le recul est constant, pour tous les points de l'aile, et c'est l'angle d'attaque qui diminue; il diminue même à tel point que pour une aile un peu longue, dépassant par exemple 3 modules, cet angle devient excessivement petit et le rendement de l'hélice diminue considérablement; car si l'aile est construite de façon à avoir un recul convenable, la partie de l'aile voisine du moyeu aura un angle d'attaque trop fort et la partie voisine de l'extrémité un angle d'attaque trop faible, et dans les deux cas l'utilisation diminuera; c'est même la raison qui fait que dans la pratique on donne généralement aux hélices, à pas constant, un diamètre ne dépassant pas le pas. En effet, le pas est un peu plus grand que l'avance A, donc une aile qui aurait une longueur égale à la moitié du pas, serait un peu supérieure à la moitié de l'avance par tour A, et si elle est égale à 3 modules elle aura une longueur $3M = 3\frac{A}{2\pi}$, donc un peu moins de $\frac{A}{2}$, ce qui équivaut environ à la moitié du pas. C'est ainsi que s'explique la règle pratique qui consiste à donner à l'hélice, à pas constant, un diamètre ne dépassant pas le pas.

En laissant la moyenne des reculs pour l'aile à angle d'attaque constant, on trouve, qu'entre les limites prises pour l'aile normale, $v_0 = 0,3$ et $v_1 = 3$, la moyenne du recul sera :

$H - A = 0,11\ A$, soit environ 11 0/0 de l'avance.

Pour tracer l'aile de l'hélice à angle d'attaque constant, il y a deux manières ; la première, celle que nous venons de voir et qui consiste à porter sur le rayon (fig. 7), à partir de l'origine O, des longueurs respectivement égales à 0,3 M, 1 M, 2 M, etc...., jusqu'à 3 M, lorsqu'il s'agit de l'aile normale, ou plus, si le calcul l'exigeait ; ces valeurs correspondent aux valeurs de tang δ croissante de 0,3 jusqu'à 3 ; on obtiendra ainsi une série de points A, B, C, ..., K. Puis on portera sur l'axe des X, à partir de l'origine, des longueurs respectivement égales à $\frac{H}{2\pi}$ M, correspondantes aux mêmes valeurs croissantes de tang δ ; les valeurs de $\frac{H}{2\pi}$ seront prises dans le tableau C. On obtiendra ainsi une série de points A', B', C', ..., K', dont le plus rapproché sera, non pas A', mais B', puisque la longueur OB' est minimum. On joindra chacun des points de l'axe OX avec le point correspondant du rayon, on aura ainsi une série de droites A'A, B'B, C'C, ... K'K, qui représenteront l'inclinaison de l'aile pour chacun des points du rayon. En prenant sur la ligne OX un point M, à la distance de l'origine, telle que OM soit égal au module, $OM = M = \frac{A}{2\pi} = \frac{V}{2\pi N}$, et joignant ce point à chacun des points A, B, C, ... K, du rayon, les angles que feront ces droites avec les droites A'A, B'B, ... K'K représenteront l'incidence sous laquelle chacune des sections de l'aile rencontrera les filets gazeux ; ces incidences sont toutes les mêmes et égales à l'incidence optima.

On déterminera ensuite la largeur de l'aile aux différentes hauteurs A, B, C .... K, comme nous le verrons plus bas, et la fig. 7, ces gabarits ont été marqués [illegible] suivant le rayon [illegible] Puis les gabarits découpés, on les cintrera, suivant le rayon correspondant au numéro du gabarit, et on les rangera à leurs places respectives sur une planchette, pour former ainsi la surface hélicoïdale, sur laquelle on présentera l'aile.

La deuxième méthode qui est plus simple, consiste à porter, comme précédemment, les points A, B, C, ... K, sur le rayon, suivant les valeurs croissantes du module, depuis 0,5 à 5 (fig. 8), puis, à prendre sur l'axe des X la longueur du module, jusqu'au point M, et à mener les droites MA, MB, MC, ... MK. On obtiendra ainsi le tracé d'une aile à pas constant, dans laquelle le pas est précisément égal à l'avance par tour, puisque $M = \frac{A}{2\pi}$ et qu'en même temps $\frac{H}{2\pi} = M$.

Dans cette aile, l'angle d'attaque est nul ; si cette aile tournait, à son nombre de tours normal N et avançait avec la vitesse V dans le sens de l'axe OX, elle n'exercerait aucune poussée longitudinale ; aussi nous ne pourrions pas l'utiliser telle que nous venons de la tracer.

Une fois cette aile exécutée d'après les données ci-dessus, c'est au moment de la fixer à son moyeu qu'il faudra la placer de façon à obtenir l'angle d'attaque constant. Pour cela, il suffira de la faire tourner autour de son rayon principal, d'un angle égal à l'incidence voulue, et de la fixer définitivement, au moyeu de l'arbre, dans cette nouvelle position décalée. On comprend facilement que ce décalage de l'aile a pour effet de faire tourner, de l'angle α, tous les éléments, qui étaient représentés sur notre tracé (fig. 8) suivant les lignes AM, BM,.... KM. Si on refaisait le tracé de la nouvelle aile ainsi décalée, les nouveaux éléments seraient représentés par des lignes droites faisant, avec les anciennes directions, des angles α et se croisant avec ces anciennes directions sur le rayon ρ. Cette nouvelle épure serait précisément celle que nous avons indiquée dans la première méthode de tracé.

Comme généralement, dans les hélices aériennes, les ailes sont rapportées, cette seconde méthode est préférable à la première, car elle est plus simple.

A notre avis, c'est une erreur de chercher à donner aux ailes d'hélices sustentatrices la figure concave qu'on donne généralement

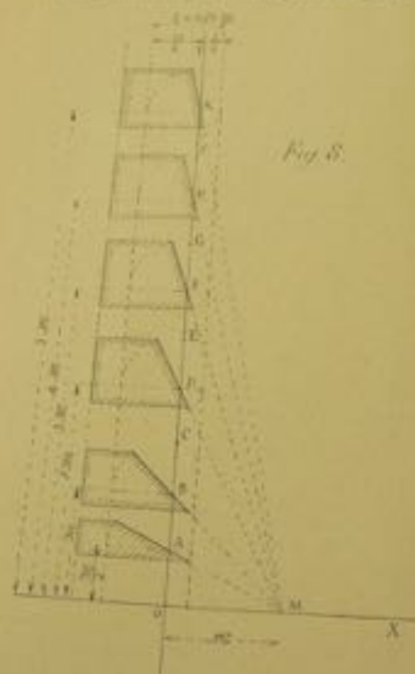


Fig. 8.

aux sustentateurs, afin d'augmenter leur puissance portante.

une diminution proportionnelle du poids porté ; et de plus la solidité de l'appareil ne peut qu'y gagner ; on en est quitte en augmentant un peu la puissance du moteur. Tandis qu'il n'en est plus de même pour les propulseurs ; leur fonction consiste à utiliser, pour la propulsion, la puissance du moteur le mieux possible ; une diminution de poids de l'hélice n'a qu'une influence insignifiante sur le poids total, et au contraire toute augmentation de la résistance nuisible, même légère, entraîne, ainsi que nous l'avons vu, une diminution très notable dans l'utilisation du propulseur. Les défenseurs du système des ailes concaves invoquent souvent, en faveur de leur thèse, l'argument que les filets d'air entrent sans choc sur la surface d'une aile concave, tangentiellement à l'élément d'entrée, et que ces filets sont déviés progressivement pour sortir le long de la génératrice de sortie, après avoir, par leur réaction sur l'aile, produit le maximum de poussée, pareillement à ce qui se produit dans les turbines à ailes courbes. A notre avis, les deux phénomènes ne sont pas comparables ; car dans les turbines ce n'est qu'un seul faisceau de filets isolés qui vient frapper l'aile courbe, et il est en effet dévié tout entier ; tandis que l'aile de l'hélice rencontre par toute sa largeur les filets d'air parallèles, et si ceux qui entrent tangentiellement par la génératrice d'entrée, peuvent être progressivement déviés par la surface concave de l'aile, comme dans une turbine, il n'en est plus de même de tous les autres filets qui viennent frapper la surface de l'aile dans toute sa largeur et surtout vers la partie arrière, sous des angles d'incidence croissants et supérieurs à l'angle optimum, ce qui diminue considérablement le rendement du propulseur. C'est pourquoi, jusqu'à preuve du contraire, croyons-nous préférable de donner aux ailes des propulseurs, des surfaces hélicoïdes planes, et non pas concaves. Une fois encore, c'est au laboratoire aérodynamique qu'il appartient de décider cette question. Si les essais de laboratoire montraient que le rapport $\mu = \frac{f}{P}$, pour des surfaces concaves, n'est pas supérieur à ce qu'il est pour les surfaces planes, introduit que les forces f et P croissent dans les mêmes proportions, il est évident alors qu'il y aurait tout avantage à munir des ailes d'hélices croisées.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé, pour les hélices aériennes : 1° les conditions de leur rendement maximum ; 2° l'incidence à donner aux éléments du propulseur ; 3° les dimensions qu'il convient de donner à la longueur des ailes, et 4° la manière de tracer le pas, ou les pas, des différentes parties de l'aile ; il nous reste encore à déterminer les dimensions transversales de ces ailes, autrement dit la largeur de l'aile aux différents rayons.

Pour cela, reportons-nous aux équations initiales qui servent à déterminer la puissance motrice et la puissance utile nécessaire à propulser notre aéroplane à la vitesse voulue.

Nous avons :

$$\mathfrak{T}_m = PV\,(\cos\beta + \mu \sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta$$
$$\mathfrak{T}_u = PV\,(\sin\beta - \mu\cos\beta)$$

En considérant le travail seconde élémentaire on aura :

$$d\mathfrak{T}_m = V\,(\cos\beta + \mu\sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\beta \cdot dP,$$
$$d\mathfrak{T}_u = V\,(\sin\beta - \mu\cos\beta)\,dP.$$

Pour une incidence constante α, la poussée utile élémentaire dP, dépendra du carré de la vitesse avec laquelle l'élément en question rencontre les molécules gazeuses, des dimensions de l'élément et d'un coefficient empirique que nous appellerons λ, on aura donc :

$$dP = \lambda W^2 ds,$$

en appelant W la vitesse de l'élément par rapport à l'air et ds sa surface. Ici se présente une question difficile, c'est le choix judicieux du coefficient λ. Il est certain que ce ne sera que par des essais effectués dans un laboratoire aérodynamique qu'il deviendra possible et même facile d'en déterminer rigoureusement la valeur exacte. Voilà la troisième fois que, dans le courant de cette étude, nous nous heurtons à des difficultés que seul un laboratoire aérodynamique est en état de résoudre ; on ne saurait par conséquent trop insister sur la nécessité imminente de la création d'un laboratoire de ce genre, car ce n'est que grâce à ce laborataire que l'on pourra déterminer les valeurs exactes de μ, α et λ, ces trois paramètres si importants, sans la connaissance exacte desquels, l'établissement, non seulement de bonnes hélices aériennes, mais encore de bons sustentateurs aéroplanes, est absolument impossible ; jusque-là il dépend des chances d'une appréciation plus ou moins heureuse. Faute de données plus précises, nous allons adopter pour λ une valeur qui semble assez bien répondre à la réalité, surtout pour les ailes d'hélices qui sont des surfaces étroites et longues attaquant l'air par leur côté le plus long ; cette valeur de λ serait, peut-être, un peu forte pour des plans ordinaires, surtout si on s'en rapporte à certaines formules empiriques proposées par le colonel Duchemin, Hutton, Lossel, M. Eiffel, etc., ou un peu faible, si on en croit d'autres expérimentateurs modernes, tels que Langley, Maxim, le capitaine Ferber et plusieurs autres aviateurs encore. Je pense cependant que nous pourrons adopter, sans trop d'erreur, $\lambda = 0{,}03$, exprimé en kilogrammes, pour un mètre carré d'aile d'hélice, attaquant l'air sous l'incidence optima, à une vitesse de 1 mètre à la seconde. Quant à la vitesse réelle de l'élément, elle sera $W = \frac{V}{\cos\beta}$.

Pour déterminer la surface de l'élément du propulseur, nous appellerons l la largeur de l'aile et $d\rho$, la hauteur de la tranche considérée le long du rayon ρ ; nous aurons ainsi, pour l'expression de la puissance élémentaire :

$$d\mathcal{T}_u = \frac{\lambda . V^2 (\sin\beta - \mu\cos\beta)\, l . d\rho}{\cos^2\beta}$$

$$d\mathcal{T}_m = \frac{\lambda . V^2 (\cos\beta + \mu\sin\beta)\, \operatorname{tang}\beta . l . d\rho}{\cos^2\beta}$$

et pour la puissance totale, en appelant a le nombre d'ailes :

$$\mathcal{T}_u = a . \lambda . V^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{\cos^2\beta}\, l . d\rho,$$

$$\mathcal{T}_m = a . \lambda . V^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\cos\beta + \mu\sin\beta}{\cos\beta}\, \operatorname{tang}\beta . l . d\rho.$$

C'est au moyen de ces équations que nous pourrons déterminer l.

Théoriquement on peut le faire, indifféremment soit en partant de l'expression de la puissance utile, soit de celle de la puissance motrice; cependant, dans la pratique, il est préférable de se baser sur la puissance motrice; c'est la seule qu'on connaisse, puisqu'on peut la mesurer directement sur l'arbre du moteur, tandis que pour la puissance utile il faut la déduire en se basant sur le rendement du propulseur qu'on ne connaît pas toujours.

Nous adopterons donc cette première manière de calcul et nous chercherons à déduire la largeur l de l'expression de la puissance motrice.

Dans l'équation de la puissance motrice, remplaçons tang β par sa valeur $\frac{2\pi N\rho}{V}$, et divisons le numérateur et le dénominateur par cos β, nous aurons :

$$\mathcal{T}_m = 2\pi N a \delta V^2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{1 + \lambda \operatorname{tang} \beta}{\cos \beta} \cdot l \cdot \rho \cdot d\rho.$$

Dans cette expression, $\mathcal{T}_m$ désigne la puissance du moteur en kilogrammètres sur l'arbre de l'hélice, a le nombre d'ailes, N le nombre de tours du propulseur à la seconde, V la vitesse d'avancement de l'aéroplane, en mètres à la seconde, et l la largeur de l'aile en mètres aux différents rayons ρ, correspondant aux valeurs successives de tang β. La largeur l est l'intersection rectifiée de la surface de l'aile par un cylindre de rayon ρ, et dont l'axe serait l'axe de rotation du propulseur. Pour tirer de cette équation les différentes valeurs de l, correspondant aux valeurs successives et croissantes de tang β, il faut relier les variables l et ρ par une relation de dépendance choisie par la considération de la forme à donner à l'aile; on pourra à volonté modifier cette forme en modifiant ces conditions de dépendance. Nous pourrons, par exemple, adopter, comme condition, que les poussées transversales éprouvées par les différentes sections cylindriques de l'aile, représentées par les bandes hélicoïdales de longueur l et de hauteur $d\rho$, soient réparties le long du rayon suivant une fonction de ce rayon telle que $C\varphi(\rho)$, où $C_{\ }$ est un paramètre à déterminer. La première élémentaire étant exprimée par $C\varphi(r)dr$, la puissance du couple moteur sera :

$$\mathfrak{T}_m = 2\pi N . a \int_{r_0}^{r_1} C . \varphi(r) . r . dr,$$

on a d'autre part l'expression de cette même puissance motrice :

$$\mathfrak{T}_m = 2\pi N a l V^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{1 + \mu \,\text{tang}\, \beta}{\cos^2 \beta} \lambda . r . dr,$$

égalons ces deux expressions :

$$C\varphi(r) = l . V^2 \lambda \frac{1 + \mu \,\text{tang}\, \beta}{\cos \beta},$$

d'où :

$$l = \frac{C . \varphi(r) \cos \beta}{\lambda . V^2 (1 + \mu \,\text{tang}\, \beta)}.$$

Pour déterminer le paramètre C, tirons-le de l'équation précédente :

$$C = \frac{\mathfrak{T}_m}{2\pi N a \int_{r_0}^{r_1} \varphi(r) . r . dr},$$

et remplaçant C par cette valeur dans l'expression de l, on a :

$$l = \frac{\mathfrak{T}_m \cos \beta \, \varphi(r)}{2\pi . N . a . \lambda . V^2 (1 + \mu \,\text{tang}\, \beta) \int_{r_0}^{r_1} \varphi(r) . r . dr},$$

remplaçons r par sa valeur $r = \frac{V \,\text{tang}\, \beta}{2\pi N}$, de plus, posons $\frac{\mathfrak{T}_m}{75} = F$, ce qui exprimera la puissance du moteur en chevaux-vapeur sur l'axe de l'hélice, remplaçons λ par sa valeur numérique $\lambda = 0{,}08$ et π par 3,14, effectuons les calculs, nous trouvons :

$$l = \frac{15494 \, F . N .}{a V^4 \int_{\text{tang}\, \beta_0}^{\text{tang}\, \beta_1} \varphi(\text{tang}\, \beta) \,\text{tang}\, \beta . d \,\text{tang}\, \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{1 + \mu \,\text{tang}\, \beta} \varphi(\text{tang}\, \beta)$$

Il y a une infinité de fonctions φ (tang β) que l'on peut choisir pour déterminer la forme de l'aile. Il y en a une particulièrement très intéressante et qui peut avoir une application directe pour les ailes des hélices aériennes ; c'est celle où la largeur l reste constante tout le long de l'aile. Nous appellerons cette largeur spéciale *largeur spécifique* et nous la désignerons par la lettre L.

Il faut pour cela trouver une fonction qui rende constante la valeur de L.

Pour satisfaire cette condition, il faudra que la variable $\frac{\varphi\,(\mathrm{tang}\,\beta)\cos\beta}{1+\mu\,\mathrm{tang}\,\beta}$ soit égale à l'unité, ou :

$$\varphi\,\mathrm{tang}\,\beta = \frac{1+\mu\,\mathrm{tang}\,\beta}{\cos\beta} = (1+\mu\,\mathrm{tang}\,\beta)\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\beta},$$

ce qui nous donnera :

$$\mathrm{L} = \frac{15494\ \mathrm{FN}}{a\,.\,\mathrm{V}^4\int_{\mathrm{tang}\,\beta_0}^{\mathrm{tang}\,\beta_1}(1+\mu\,\mathrm{tang}\,\beta)\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\beta}\,.\,\mathrm{tang}\,\beta\, d\,(\mathrm{tang}\,\beta)}.$$

Pour faciliter l'intégration, posons :

$$y = \sqrt{\mathrm{tang}^2\beta+1}+\mathrm{tang}\,\beta,$$

par conséquent :

$$y_0 = \sqrt{\mathrm{tang}^2\beta_0+1}+\mathrm{tang}\,\beta_0 \quad \text{et} \quad y_1 = \sqrt{\mathrm{tang}^2\beta_1+1}+\mathrm{tang}\,\beta_1.$$

ce qui nous donnera, après l'intégration entre les limites données y_0 et y_1 :

$$\mathrm{L} = \frac{247800\,.\,\mathrm{F.N.}}{a\mathrm{V}^4\left[\frac{\mu}{4}\left(y_1^4-y_0^4-\frac{1}{y_1^4-y_0^4}\right)+\frac{2}{3}\left(y_1^3-y_0^3+\frac{1}{y_1^3-y_0^3}\right)+ 2\left(y_1-y_0+\frac{1}{y_1-y_0}\right)-2\mu\,\mathrm{L}\frac{y_1}{y_0}\right]}$$

Pour l'aile normale pour laquelle $y_0 = 0{,}5$ et $y_1 = 5$, en prenant $\mu = 0{,}05$, nous aurons, en effectuant les calculs :

$$\mathrm{L} = 298{,}5\,\frac{\mathrm{FN}}{a\mathrm{V}^4}.$$

Nous savons que dans le cas d'une surface plane rectangulaire allongée, attaquant l'air sous une petite incidence, la résistance est beaucoup plus grande lorsque l'aile est attaquée par la grande longueur que s'il l'était par la petite. Cela s'explique jusqu'à un certain point par la considération que, dans l'attaque par le petit côté du rectangle, l'air peut plus facilement s'écouler par les longs côtés de la palette, tandis que lorsque c'est le grand côté qui attaque l'air, l'écoulement latéral est de beaucoup réduit puisqu'il est proportionnel à la longueur de la tranche, et que cette tranche, dans ce second cas, est plus petite. Il sera donc avantageux que le rapport de la largeur de l'aile à sa longueur soit faible ; prenons par exemple le rapport constant de $\frac{1}{6}$ entre la largeur de l'aile et sa longueur, c'est un rapport qui semble donner de bons résultats dans la pratique.

Posons donc $\frac{L}{r_1 - r_0} = \frac{1}{6}$; mais nous savons que :

$$r_1 - r_0 = \frac{V}{2\pi N} (\text{tang}\, \beta_1 - \text{tang}\, \beta_0),$$

et pour :

$$\text{tang}\, \beta_0 = 0,5 \quad \text{et} \quad \text{tang}\, \beta_1 = 5,$$

nous aurons :

$$r_1 - r_0 = \frac{V}{N} 0,717.$$

Divisons L par la valeur trouvée pour $r_1 - r_0$, nous aurons :

$$\frac{L}{r_1 - r_0} = 416,5 \frac{FN^2}{aV^3}.$$

Comme, d'autre part, nous avons admis que dans hélices normales le rapport $\frac{L}{r_1 - r_0}$, devait être $\frac{1}{6}$, en remplaçant ce rapport par sa valeur nous aurons :

$$1 = 2500 \frac{FN^2}{aV^3},$$

d'où :

$$a = 2500 \frac{FN^2}{V^3}.$$

Nous donnerons à cette expression le nom d'équation de compatibilité; car elle nous servira pour déterminer la compatibilité des quatre grandeurs en présence, la puissance en HP, le nombre de tours N du propulseur à la seconde, la vitesse V de l'aéroplane en mètres, et α le nombre d'ailes du propulseur. Lorsque nous aurons une hélice aérienne à déterminer, il nous faudra partir d'une base; cette base sera d'abord la puissance nécessaire pour enlever l'aéroplane et la vitesse de son avancement; ces données sont indépendantes du propulseur; en partant de ces données il faudra calculer l'hélice de façon à ce que son nombre de tours à la seconde et son nombre d'ailes soient tels que l'équation de compatibilité soit satisfaite. Le nombre d'ailes ainsi déterminé se rapportera évidemment à des ailes normales. Si les conditions de fonctionnement de l'hélice étaient telles que l'équation de compatibilité ne puisse pas être satisfaite, c'est-à-dire que le nombre d'ailes trouvé par le calcul soit trop grand, ou ne donne pas un nombre entier, il faudra, soit augmenter la longueur des ailes, comme nous le verrons plus loin, soit augmenter leur largeur, dans la proportion du chiffre trouvé par le calcul, au chiffre adopté.

Il faut bien se rendre compte que cette équation de compatibilité est une convention parfaitement légitime et que nous avons eu le droit de faire; elle veut dire simplement que le nombre d'ailes normales, calculé par l'équation de compatibilité, tournant à un nombre de tours N à la seconde, et avançant dans l'air avec une vitesse de V mètres à la seconde, absorbent une puissance motrice de F chevaux-vapeur; de plus, que la largeur spécifique de ces ailes est égale au sixième de la longueur de l'aile.

Reprenons l'expression de la largeur spécifique que nous venons de trouver:

$$L = \frac{298,5\,FN}{\alpha V^3},$$

divisons cette largeur par le module $M = \frac{V}{2\pi N}$, nous aurons:

$$\frac{L}{M} = 1875\,\frac{FN^2}{\alpha V^4}.$$

Nous retrouvons ici l'expression que nous venons de voir dans l'équation de compatibilité.

Remplaçons, dans $\frac{L}{M}$, cette expression par sa valeur numérique, nous aurons :

soit :
$$\frac{L}{M} = \frac{1875}{2500} = 0,75$$

$$L = 0,75\ M.$$

ce qui veut dire que pour une aile normale, à laquelle on a donné une largeur spécifique constante, cette largeur spécifique sera les 3/4 du module.

Cette valeur de la largeur spécifique peut se déduire aussi du rapport que nous avons admis entre la largeur spécifique et la longueur de l'aile, et qui est de 1/6 ; comme la longueur de l'aile est 4,5 modules, le sixième qui représente la largeur spécifique sera :

$$L = \frac{4,5}{6}\ M = 0,75\ M.$$

La forme d'aile à largeur spécifique constante L, sera une des meilleures à employer pour les hélices aériennes ; ce sera un rectangle dont la hauteur est 4,5 fois le module, et sa largeur, égale aux 3/4 du module ; l'aile commencera à une distance d'un demi-module de l'axe et son rayon sera de 5 modules.

De cette manière l'aile normale à largeur spécifique constante est complètement déterminée dans tous ses éléments qui, tous, sont exprimés en chiffres abstraits, car ils ont tous le module pour échelle commune.

Pour avoir l'expression générale de la largeur spécifique exprimée en module, il faudra diviser l'expression générale de L par celle M et remplacer l'expression $\frac{FN^2}{aV^2}$ par sa valeur numérique $\frac{1}{2500}$, on aura alors :

$$\frac{L}{M} = \frac{622,7}{\frac{3}{4}\left(y_1^4 - y_2^4 - \frac{1}{y_1^4 - y_2^4}\right) + \frac{2}{3}\left(y_1^3 - y_2^3 + \frac{1}{y_1^3 - y_2^3}\right) + 2\left(y_1 - y_2 + \frac{1}{y_1 - y_2}\right) - 2\mathcal{L}\frac{y_1}{y_2}}$$

Si, d'après cette formule, on calcule les valeurs de $\frac{L}{M}$ en [illegible] faisant $r_2 = 0,5$ et r_1 successivement égal à 5, 6, 7, 8 modules, on trouve les chiffres :

pour	$r_1 = 5$ M	6 M	7 M	8 M
	$L = 0,[illegible]$ M	$0,427$ M	$0,275$ M	$0,[illegible]$ M.

Nous voyons que la largeur spécifique, pour $r_1 = 5$, est $0,[illegible]$ modules, c'est-à-dire 1/6 de la longueur de l'aile ; pour $r_1 = 6$, cette largeur spécifique n'est plus que de $\frac{1}{13}$, pour $r_1 = 7$ elle est $\frac{1}{25}$ et pour $r_1 = 8$ de $\frac{1}{44}$ seulement de la longueur de l'aile.
Si donc nous voulions, pour toutes ces ailes, avoir le rapport de 1/6, admis pour l'aile normale, il faudrait augmenter la largeur de la seconde aile dans le rapport de 2,1, de la troisième dans le rapport de 4,1, et de la dernière dans le rapport de 7,3. Par conséquent une hélice ayant un rayon $r_1 = 8$, et dont la largeur d'aile serait 1/6 de la longueur, comme dans les ailes normales, aurait une surface propulsive active 7,3 fois trop grande. Ainsi lorsque l'équation de compatibilité montrera que le nombre d'ailes nécessaire a, est supérieur au nombre que l'on désire adopter a', et qu'il faudra multiplier par le rapport $\frac{a}{a'}$, les largeurs d'ailes employées, on pourra toujours trouver un rayon extérieur r_1, supérieur à 5, tel que la largeur spécifique de l'aile, divisée par la longueur de l'aile $\frac{L}{r_1 - r_2}$, et multipliée par le rapport $\frac{a}{a'}$, soit précisément égal à 1/6, rapport admis pour les ailes normales.

Ainsi si le rapport $\frac{a}{a'}$ était par exemple égal à 7,3, il faudrait donner à r_1 une valeur de 8M, et une largeur d'aile égale à $\frac{1}{6}$ de sa longueur : le nombre a' d'ailes, ainsi modifiées, équivaudrait à a ailes normales, c'est-à-dire absorberait la puissance motrice F, en tournant à N tours, et avançant à la vitesse V.

Reprenons l'expression générale de la largeur de l'aile :

$$l = [illegible]$$

Divisons par $M = \frac{V}{2\pi N}$ les deux membres de l'équation, nous aurons :

$$\frac{l}{M} = [illegible]$$

Nous venons de voir que dans l'équation de compatibilité $\frac{FN^4}{2V^5} = [illegible]$, nous pouvons donc remplacer cette expression par sa valeur numérique et il vient :

$$\frac{l}{M} = [illegible]$$

ou, pour abréger la notation, désignant par $\tau = \text{tang}\,\beta$, par $\tau_0 = \text{tang}\,\beta_0$, par $\tau_1 = \text{tang}\,\beta_1$ et $\zeta = \cos\beta$, on aura :

$$\frac{l}{M} = [illegible]$$

expression indépendante de la puissance F, du nombre de tours N et de la vitesse V, et ne dépendant que des diverses valeurs de τ. Il est bien entendu que cette expression n'est vraie qu'à la condition que l'on admette les conditions déterminées par l'équation de compatibilité.

C'est au moyen de cette équation que l'on déterminera le nombre d'ailes nécessaire pour les conditions données. Il pourrait cependant arriver que le nombre d'ailes ainsi calculé diffère de celui qu'il serait possible d'utiliser, dans la pratique, pour le cas donné ; alors, si l'écart des deux nombres était peu important, on se contenterait de multiplier les largeurs d'ailes, que [illegible] par le rapport du nombre d'ailes qui déterminera l'équation de compatibilité et le nombre d'ailes réel. Nous appellerons ce rapport $\varphi = \frac{n}{n'}$, coefficient de [illegible]; on appelant n le nombre d'ailes calculé et n' le nombre réel. Dans le cas où le rapport φ deviendrait trop grand, voisin de 2 par exemple, on [illegible], on ne pourrait plus appliquer ce procédé, car les longueurs d'ailes ainsi obtenues deviendraient plus que le $\frac{1}{5}$ de leur longueur, ce qui pour les ailes d'une hélice aérienne serait exagéré; il y aurait lieu alors de commencer à donner à l'aile la longueur que nous avons adoptée pour les ailes [illegible] et qui est de 1M, en augmentant cette longueur jusqu'à 2M, 3M, 4M, et peut-être au-delà; il faudrait dans ce cas calculer les largeurs d'ailes directement par les formules générales, en donnant à [illegible] la valeur adoptée. Ainsi, pour le cas du calcul de la largeur spécifique L on prendra :

$$\frac{L}{M} = \frac{[illegible]\,F.\,N^2}{\pi . V^2 \Big[\frac{2}{3}\Big(y_1^3 - y_0^3 - \frac{1}{y_1^3 - y_0^3} \Big) + \frac{2}{3} \Big(y_1^3 - y_0^3 + \frac{1}{y_1^3 - y_0^3} \Big) + 2 \Big(y_1 - y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \Big) - \log \frac{y_1}{y_0} \Big]}$$

en faisant :

$$y_0 = \sqrt{\eta_0^2 + 1} + \eta_0 \quad \text{et} \quad y_1 = \sqrt{\eta_1^2 + 1} + \eta_1.$$

On augmentera la valeur de η_0 jusqu'à ce que la largeur obtenue L soit environ $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{5}$ de la longueur de l'aile qui est $\eta_1 - \eta_0$; en admettant toujours pour η_0 la valeur $\eta_0 = 0,5$.

Si l'on voulait donner à l'aile, non pas la forme d'égale largeur spécifique, mais une forme différente, on se servirait de la formule générale :

$$\frac{l}{M} = \frac{[illegible]\,F.\,N^2}{\pi . V^2 \int_{\eta_0}^{\eta_1} \varphi(\xi) . \xi . d\xi} \cdot \frac{\xi^2}{1 + \eta \xi} \cdot \varphi(\xi).$$

[illegible]

Nous avons montré, qu'à la condition de satisfaire à l'équation de compatibilité, on pourrait calculer les largeurs d'aile par la formule générale :

$$\frac{l}{M} = \frac{\mathfrak{M}_0}{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi} \cdot \frac{\xi}{1 + \mu\xi} \cdot \varphi(\xi)$$

et qu'en choisissant convenablement la fonction $\varphi(\xi)$ on pouvait obtenir la forme d'aile que l'on désirait.

Nous allons passer en revue un certain nombre de ces fonctions qui nous donneront des formes d'ailes applicables aux propulseurs aériens, soit directement, soit en combinaison avec d'autres fonctions.

Une des plus simples est $\varphi(\xi) = \xi + p$, où p est un paramètre arbitraire que l'on peut faire varier à volonté.

En remplaçant $\varphi(\xi)$ par la fonction adoptée, on obtient après intégration :

$$\frac{l}{M} = \frac{2\mathfrak{M}}{2(\xi_1^3 - \xi_0^3) + 3p(\xi_1^2 - \xi_0^2)} \cdot \frac{\xi^2}{1 + \mu\xi} \cdot (\xi + p).$$

et pour l'aile normale, entre les limites $\eta_0 = 0,5$ et $\eta_1 = 5$:

$$\frac{l}{M} = \frac{233}{1097,7 + 74,3} \cdot \frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}(1+p).$$

A titre d'exemple, pour montrer la manière la plus pratique de grouper les calculs, nous avons, dans le tableau D, poursuivi le calcul des largeurs d'ailes $\frac{l}{M}$ d'une aile normale, par la formule ci-dessus, en adoptant pour p la valeur $p = 1$.

TABLEAU D.

Valeurs successives de ζ	0,5	1	2	3	4	5
Valeurs correspond. de $(\zeta + p)$	1,5	2	3	4	5	6
Logarithmes de ces valeurs	0,1761	0,3010	0,4771	0,6021	0,6990	0,7782
Log. de $\frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}$ (tirés du tableau E de l'appendice)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Log. du facteur $\frac{233}{1097,7 + 74,3}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Log. $\frac{l}{M}$ (somme de trois rangées)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Valeur correspondante de $\frac{l}{M}$	0,943	0,969	0,875	0,791	0,727	0,677

Dans la première ligne horizontale, nous avons rangé les valeurs successives de ζ, depuis $\zeta_0 = 0,5$ jusqu'à $\zeta_1 = 6$; au-dessous, nous avons donné les valeurs correspondantes de $\zeta + p$ en admettant $p = 1$. Dans la troisième ligne viennent les logarithmes des nombres de la rangée précédente. Au-dessous sont inscrits les logarithmes du facteur variable $\frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}$, dont les valeurs successives ont été calculées, une fois pour toutes, depuis $\zeta = 0,5$ jusqu'à $\zeta = 8$. Ces valeurs, qui figurent dans le tableau E de l'appendice, ont été calculées pour des valeurs de ζ variant d'une unité, jusqu'à $\zeta = 5$, et d'une demi-unité, depuis $\zeta = 5$ jusqu'à $\zeta = 8$. Cela a été fait en vue de la possibilité de pouvoir adopter pour z, supérieur à 5M, une valeur intermédiaire entre deux valeurs entières de ξ; et, dans ce cas, le logarithme, correspondant à un de ces facteurs intermédiaires, pourrait devenir nécessaire. Dans la cinquième rangée horizontale on a répété dans chaque colonne, le logarithme du facteur constant $\frac{[illegible]}{[illegible] + 74,3\,p}$, qui pour $p = 1$, donne le logarithme $\overline{1},[illegible]$.

En faisant dans chaque colonne la somme des logarithmes des trois facteurs $\xi + p$, $\frac{\xi}{1 + [illegible]}$, et du facteur constant, on obtient le logarithme des largeurs $\frac{l}{[illegible]}$, qui sont les chiffres de la sixième rangée. Au-dessous de ces logarithmes sont rangées les valeurs réelles des largeurs cherchées.

Dans la figure [illegible] nous avons représenté graphiquement les courbes qui donnent les largeurs d'ailes calculées par la formule ci-dessus et dans laquelle nous avons fait varier successivement p, depuis $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, jusqu'à p infini, ce qui correspond à $\varphi(\xi) =$ constante.

En examinant cette figure, nous voyons que l'aile, déterminée par la courbe qui correspond à $p = 0$, est très étroite dans le bas et va en s'élargissant vers l'extrémité. En augmentant la valeur de p, l'aile s'élargit progressivement à son origine et se rétrécit à son extrémité; pour $p = 1$, la forme d'aile obtenue est directement applicable aux propulseurs aériens. Avec l'augmentation de p, l'aile s'élargit considérablement dans le bas et devient très étroite vers son extrémité. Cette forme d'aile ne peut plus être utilisée dans la pratique, dans son état actuel, mais pourrait être combinée avec une autre forme qui serait, au contraire, étroite dans le bas et large vers le bout. Dans ce cas, on calculerait la moitié des largeurs au moyen d'une formule, et l'autre moitié au moyen d'une autre convenablement choisie et on en ferait les sommes.

Nous avons tenu à indiquer comment la forme de l'aile se modifiait avec la variation du paramètre arbitraire, pour montrer la facilité avec laquelle on peut arriver à obtenir une forme d'aile voulue en choisissant convenablement la fonction $\varphi(\xi)$ et les paramètres arbitraires.

Dans la figure 10 nous avons groupé les courbes obtenues par une autre fonction :

$$\varphi(\xi) = \xi^2 + p.$$

Dans ce cas, l'équation devient :

$$[illegible]$$

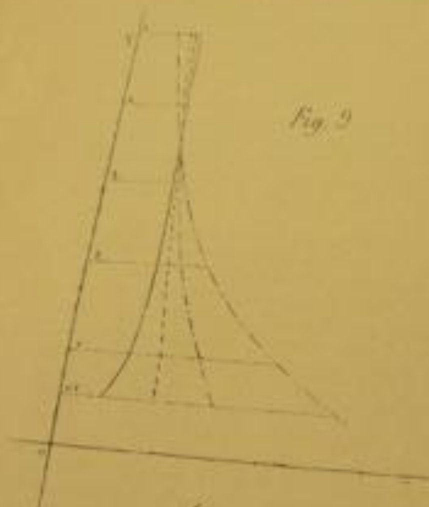
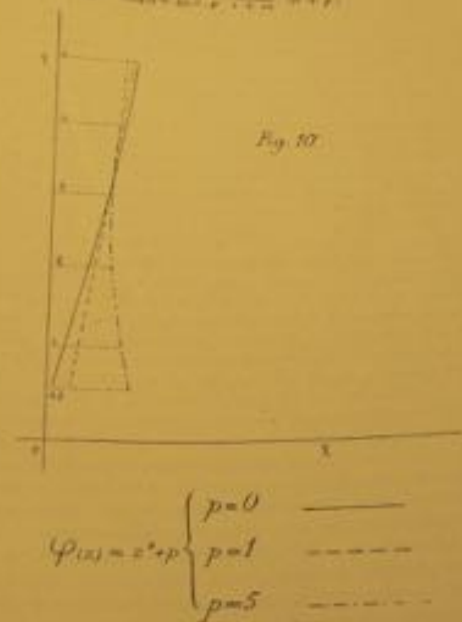


Fig. 9

$$\varphi_{(x)} = x \cdot p \begin{cases} p = 0 & \text{———} \\ p = 1 & \text{- - - - -} \\ p = 3 & \text{— · — · —} \\ p = \infty & \varphi_{(x)} \ \text{Constante} \ \text{- - —} \end{cases}$$



Les trois courbes de la figure 10 ont été calculées en donnant successivement à p les valeurs de $p = 0$, $p = 1$ et $p = 5$.

La première de ces courbes est très étroite dans le bas et s'élargit vers le haut; la deuxième est moins accentuée que la première et la troisième rétrécit légèrement l'aile vers son milieu. Cette dernière forme pourrait être combinée avec une forme qui, au contraire, s'élargirait un peu vers son milieu ; on pourrait y arriver, par exemple, par la fonction $\varphi(\xi) = p\xi^2 - \xi^4 + q$ dans laquelle p serait plus grand ou égal à 2 et q arbitraire; on aurait alors :

$$\frac{l}{M} = [illegible] \cdot (p\xi^2 - \xi^4 + q)$$

On pourrait varier à l'infini le choix des diverses fonctions; nous nous bornerons cependant à celles que nous avons passées en revue, car elles suffisent amplement pour le calcul des largeurs d'ailes d'un propulseur aérien, d'autant plus que la forme d'une hélice aérienne devra toujours se rapprocher d'un type commun, généralement long et étroit.

De toutes les formes d'ailes que l'on peut adopter pour une *hélice aérienne*, c'est encore celle à *largeur spécifique constante qui est la plus commode à calculer* et qui trouvera le plus souvent son application *directe*. Elle a de plus l'avantage de faciliter la comparaison des différentes hélices entre elles.

Les ailes que nous venons de passer en revue ont toutes la même longueur, de 5M, elles tournent au même nombre de tours N, avancent avec la même vitesse V, et absorbent la *même puissance motrice* F ; elles sont donc toutes *équiactives*, et leurs surfaces propulsives ont la même *efficacité* mécanique, malgré les différences très notables dans leurs dimensions géométriques. On voit par là à quel point la surface *active* de l'aile est *différente* de la surface géométrique. Aussi, lorsqu'on dit qu'il convient de donner à l'hélice telle surface propulsive, cela ne veut rien dire du tout, tant que l'on n'aura pas indiqué la *répartition* de cette surface. Cela se comprend du reste aisément. Car un centimètre carré de surface propulsive aura une action mécanique toute différente suivant qu'il se trouvera placé dans le voisinage de l'axe de rotation ou vers l'extrémité de l'aile, les poussées produites étant proportionnelles aux carrés des vitesses et par conséquent des rayons. De plus, l'inclinaison de cet élément propulsif sera différent suivant sa position sur l'aile et, par conséquent, il absorbera une puissance motrice différente suivant qu'il est plus ou moins incliné.

Il s'en suit qu'il est impossible de déterminer la surface active d'une hélice par sa surface géométrique, ou sa fraction de pas moyenne, comme on le fait très souvent par ignorance ou routine.

Toutes les fois que, pour une aile, on veut déterminer la surface active, il est indispensable de la déduire des éléments mécaniques de son fonctionnement. Aussi, voyons-nous constamment des ailes absolument équiactives, différer considérablement, au point de vue de leur surface géométrique, et réciproquement des ailes de mêmes surfaces géométriques avoir des effets mécaniques absolument différents.

Toutes les ailes que nous venons de passer en revue sont rigoureusement équiactives et cependant, ainsi qu'on peut le voir sur les figures 9 et 10, elles diffèrent très sensiblement au point de vue de leur surface géométrique. Elles sont, du reste, toutes équiactives avec l'aile à largeur spécifique constante dans laquelle la largeur L est égale aux $\frac{3}{4}$ du module. Voilà donc un moyen de comparer les différentes hélices entre elles ; il suffit de les remplacer par leur forme équiactive, à largeur spécifique constante, et le rapport de ces largeurs spécifiques donnera rigoureusement le rapport des surfaces actives de ces hélices.

Ceci est vrai, non seulement pour des hélices de même diamètre, mais aussi pour celles de diamètre différent, pourvu que l'on ait à faire à des ailes normales.

Car, pour les ailes normales, on sait que la largeur spécifique est égale à 0,75M, on aura donc immédiatement la forme équiactive de l'aile donnée, si toutefois, à la construction, les largeurs d'ailes n'ont pas été multipliées par un coefficient de réduction. Il sera facile de s'en convaincre en faisant la moyenne *mécanique* (et non pas géométrique), des largeurs de l'aile donnée, correspondant aux rayons de l'aile multiple du module.

Pour cela on fera la somme des produits de ces largeurs par les carrés des rayons correspondants et on la divisera par la somme des carrés des rayons ; on aura ainsi la moyenne mécanique des largeurs qui correspond à la largeur spécifique ; cette moyenne sera :

$$L = \frac{\Sigma l \cdot \rho^2}{\Sigma \rho^2}.$$

Il est bien entendu que dans cette équation toutes ces grandeurs sont exprimées en fonction du module, par conséquent en nombres abstraits.

Lorsqu'on aura ainsi trouvé la valeur numérique de la largeur spécifique de l'aile, il sera facile, en la comparant à la largeur spécifique normale, de se convaincre si les largeurs adoptées n'ont pas été multipliées par un coefficient de réduction, et on trouvera ce coefficient s'il a été employé.

Ce mode de comparaison des ailes d'hélice, qui consiste à transformer l'aile donnée en une aile équiactive à largeur spécifique constante, peut même s'appliquer aux ailes à angle d'incidence variable, comme le sont les ailes à pas constant. Seulement, dans ce cas, il y aura lieu de tenir compte pour chaque bande, qui représente la largeur de l'aile au rayon donné, de son incidence propre ; et comme les poussées sont sensiblement proportionnelles aux incidences, il y aura lieu, dans la moyenne mécanique, de tenir compte de ces incidences en posant :

$$L = \frac{\Sigma l \dfrac{\alpha'}{\alpha} \cdot \rho^2}{\Sigma \rho^2},$$

α' étant l'incidence réelle de la bande dont la largeur est l, et α l'incidence optima constante. Cette moyenne mécanique est suffisamment exacte. On obtiendra ainsi une aile à incidence constante et à largeur spécifique constante, complètement équiactive avec l'aile à incidence variable et d'une forme quelconque. La largeur spécifique constante pourra donc servir de caractéristique pour toutes les ailes d'hélices.

Il est bien entendu que pour toutes les ailes, quelles qu'elles soient, nous admettons une fois pour toutes le rayon du moyeu $\rho_0 = 0,5$.

Nous avons vu que tous les éléments de l'aile, sans exception, s'expriment en fonction de cette mesure commune qui est le module ; de plus, pour les ailes normales, tous ces éléments sont constants et ne varient pas d'une hélice à l'autre ; ainsi les rayons du moyeu et de l'aile sont toujours exprimés par :

$$r_1 = 0{,}5M \quad \text{et} \quad r_2 = 5M,$$

les longueurs prises sur les rayons intermédiaires sont toujours les mêmes :

$$0{,}5M,\ 1M,\ 2M,\ 3M,\ 4M \quad \text{et} \quad 5M\,;$$

les largeurs d'ailes, à ces rayons, sont aussi les mêmes, que ce soit pour la largeur spécifique, qui est de 0,75M, ou bien pour les largeurs calculées par une des formules ci-dessus ; elles seront toujours les mêmes pour les mêmes rayons. Pour ce qui est du pas variable de l'aile, il est aussi toujours le même exprimé en fonction du module, pour le même point du rayon. De cette façon, l'on peut dire qu'il n'existe qu'une *seule aile normale* dont les dimensions dépendent de la grandeur du module. Si donc on calcule une fois pour toutes les éléments d'une aile normale, ce calcul servira *pour toutes les ailes normales* qui pourront exister ; il en sera de même de l'épure de l'aile normale qui servira indifféremment pour toutes les ailes normales ; il n'y aura que l'échelle qui changera. Cette échelle c'est le module, il dépend des conditions de fonctionnement à l'aile donnée puisqu'il est fonction de la vitesse et du nombre de tours. Pour ce qui est du nombre d'ailes à employer pour chaque cas, ce nombre est déterminé, ainsi que nous l'avons vu, par l'équation de compatibilité. Nous voyons donc que nous pouvons calculer et tracer n'importe quelle hélice propulsive en nous servant uniquement de l'équation de compatibilité et du tableau calculé, une fois pour toutes, qui déterminera les éléments de l'aile en fonction de son module.

Pour la plupart des cas, l'aile normale devra pouvoir être appliquée, grâce à un choix judicieux des éléments qu'on adoptera dans l'équation de compatibilité. Dans le cas cependant où cette équation ne pourrait pas être satisfaite, on en serait quitte à augmenter le rayon de l'aile.

Nous arrivons donc à cette conclusion que le propulseur n'est pas, à proprement parler, l'hélice, mais que c'est l'aile qui est l'organe de propulsion et que cet organe est toujours le même, quoique à une échelle différente ; ce n'est que le nombre de ces organes qui doit être plus ou moins grand, suivant la puissance motrice à absorber et c'est ce que détermine l'équation de compatibilité.

Voilà donc le résultat final auquel nous avons été amenés en partant d'un postulat parfaitement juste et légitime ; ce postulat a été la détermination de la résistance éprouvée par un élément plan se déplaçant suivant une trajectoire hélicoïdale et rencontrant les filets fluides sous une certaine incidence. Dans toute la série de nos raisonnements, nous n'avons fait aucune hypothèse et nous avons été amenés par une suite de déductions logiques et de calculs rigoureux aux conclusions que nous venons de formuler. Nous pouvons donc affirmer sans crainte que la présente théorie des propulseurs hélicoïdaux est rigoureusement juste, tout au moins au point de vue qualitatif, car au point de vue quantitatif, elle dépend évidemment des coefficients adoptés dans le courant de cette étude. Si leurs valeurs numériques étaient différentes de celles que nous avons admises, rien ne serait changé à la théorie, et il suffirait de modifier les résultats des calculs proportionnellement à ces nouveaux coefficients.

Donc, pour avoir des résultats absolument justes, avec la conception de l'hélice propulsive que nous possédons grâce à cette théorie, il ne nous reste qu'à déterminer d'une façon précise et, une fois pour toutes, les valeurs numériques des coefficients que nous avons employés. Cette détermination ne peut être faite d'une façon rigoureuse que dans un laboratoire d'essais aérodynamiques.

Ailleurs nous avons indiqué la manière d'organiser un laboratoire de ce genre.

Il devrait consister en un tunnel de fort diamètre dans lequel on ferait circuler un courant d'air artificiel d'une vitesse égale à celle que pourraient atteindre les appareils d'aviation en air calme. C'est dans ce courant d'air que l'on installerait, à poste fixe, les appareils à expérimenter, tels que les sustentateurs et les propulseurs. Ces appareils devraient être de grandeur naturelle. Pour ce qui est des hélices propulsives, on devrait les expérimenter de la façon suivante.

On installerait une balance dynamométrique, avec moteur électrique, disposée de façon à enregistrer directement le couple résistant, le nombre de tours et la poussée longitudinale. Il est facile d'imaginer une balance de ce genre, aussi rigoureuse que l'on voudra; on pourrait même prendre comme modèle celle que le colonel Renard avait construite pour des essais d'hélices [illegible] à Chalais-Meudon. Sur l'arbre tournant on installerait l'hélice à expérimenter. Le courant d'air dans le tunnel serait réglé à une vitesse déterminée V, et les ailes de l'hélice seraient construites de façon à avoir un pas constant exactement égal à l'avance par tour qui est $\frac{V}{N}$, N étant le nombre de tours auquel devrait tourner l'arbre de l'hélice. Lorsque l'hélice fonctionnerait dans ces conditions, l'angle d'attaque serait évidemment nul, puisque le pas serait égal à l'avance; dans ce cas, la poussée longitudinale serait nulle et toute la puissance motrice serait dépensée à vaincre les frottements de l'air sur les ailes. Connaissant la valeur du couple résistant et le nombre de tours de l'hélice, on aurait la mesure de la puissance absorbée. Faisant varier simultanément la vitesse du courant d'air du tunnel et la vitesse de rotation de l'hélice, de façon à conserver la constance du rapport $A = \frac{V}{N}$, on aurait, dans ces différentes conditions, les valeurs de la puissance absorbée par les frottements des ailes dans l'air. On dresserait ainsi la courbe de ces puissances, en fonction de la vitesse croissante. Cette première série d'essais serait destinée à déterminer l'une des parties du rapport ε qui, ainsi que nous l'avons montré, se compose d'un terme qui est tang α, et d'un autre qui est dû aux frottements de l'aile dans l'air. Dans cette première expérience, α étant nul, ce serait le second terme seul que nous mesurerions. Après cette première série d'essais, on décalerait les ailes de l'hélice sur le moyeu, en les faisant tourner de 1 degré autour de leur rayon principal et dans le sens de l'augmentation du pas. Ce décalage donnerait aux ailes un angle d'attaque $\alpha = 1°$, à la condition cependant que l'avance par tour reste la même que précédemment, c'est-à-dire que le nombre de tours de l'hélice soit toujours proportionnel à la vitesse du courant d'air. Dans cette nouvelle série d'essais, on obtiendra une poussée longitudinale que l'on mesu-

[illegible] pour chaque vitesse. Cette poussée, multipliée par la vitesse du courant, représentera la puissance utile, et le rapport de la puissance utile à la puissance motrice, enregistrée directement, donnera le coefficient d'utilisation K. De plus, le couple résistant donnera la mesure de la résistance nuisible f, tandis que la poussée longitudinale mesurera la poussée utile P. Le rapport de ces deux forces déterminera la valeur numérique de [illegible].

Après cette deuxième série d'expériences, on décalera encore, d'un degré, les ailes de l'hélice, de façon à augmenter l'angle d'attaque et l'amener à 4°, toujours dans les mêmes conditions d'avance par tour. On relèvera une nouvelle série d'essais et on déterminera la courbe des rendements. Après quoi on décalera les ailes de 5° et on recommencera les mêmes essais. En comparant les courbes des rendements dans ces trois séries d'essais, avec 3°, 4° et 5° d'angle d'attaque, on verra si les rendements augmentent ou diminuent. S'ils augmentent, on augmentera encore l'angle d'attaque jusqu'au moment où l'on arrivera au maximum de rendement. A ce moment, en rapprochant les limites des variations de l'angle d'attaque, on arrivera à déterminer rigoureusement et une fois pour toutes l'angle d'attaque réellement optimum. En même temps, on déterminera aussi le rendement maximum moyen d'une aile d'hélice. On procédera ensuite à la vérification du coefficient λ. Pour cela, on expérimentera des ailes normales à largeur spécifique constante égale aux $\frac{3}{4}$ du module. On fera tourner l'hélice au nombre de tours N dans un courant d'air de vitesse V, et on enregistrera la puissance motrice dépensée. Si cette puissance motrice est plus faible ou plus forte que celle qu'indique le calcul, pour le cas donné, c'est que le coefficient λ réel est plus fort ou plus faible que celui que nous avons admis ; et il y aura lieu de rectifier la valeur admise $\lambda = 0{,}03$, en la multipliant par le rapport direct des couples moteurs, calculé et réel, puisque nous savons que :

$$P = \lambda \cdot s \cdot W^2 \cdot n$$

donc si :

$$P' = \lambda' \cdot s \cdot W^2 \cdot n,$$

on aura le rapport direct :

$$\frac{P}{P'} = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

en appelant ν' le coefficient rectifié et P' la puissance mesurée ; donc :

$$\nu' = \frac{P}{P'}\,\nu.$$

Cette série d'essais nous permettra ainsi de déterminer rigoureusement et une fois pour toutes ce coefficient ν dont dépend la largeur des ailes. Comme vérification, on expérimentera une deuxième hélice, en tous points semblable à la première, mais dans laquelle la largeur spécifique aura été modifiée dans le rapport $\frac{\nu'}{\nu}$, alors on devra trouver, dans le nouvel essai, que la puissance motrice absorbée est égale à celle calculée.

Après cette série d'expériences, qui sont en somme très faciles à entreprendre, tous les éléments quantitatifs de notre théorie seront rigoureusement connus, et il deviendra alors possible de calculer, sans la moindre erreur, les hélices propulsives, de rendement maximum, pour tous les cas donnés.

Il serait tout à fait illusoire de tenter ce genre d'essais en dehors d'un laboratoire, ou comme on le croit généralement d'arriver à déterminer les coefficients en question en se servant des résultats fournis par la pratique continue des appareils d'aviation et en améliorant petit à petit les hélices propulsives. Nous ne croyons pas qu'une méthode de ce genre puisse donner des résultats satisfaisants, car les mesures des éléments du problème ne sont pas possibles dans des exercices pratiques, c'est pourquoi nous ne saurions trop insister sur la nécessité d'un laboratoire.

Quant aux essais d'hélices au point fixe, comme on les fait généralement, cette méthode n'est possible que pour des hélices sustentatrices, pour les autres, elle est absolument fausse et les résultats obtenus par ces essais n'ont rien de commun avec ceux que l'on trouverait si l'hélice travaillait dans les conditions réelles de vitesse et de nombre de tours. Dans les essais au point fixe et en marche, la puissance motrice, le nombre de tours et la poussée longitudinale sont absolument différentes dans l'un et l'autre cas.

Pour ce qui est des hélices sustentatrices, nous ne nous en occuperons pas dans la présente étude, car elles rentrent moins dans la catégorie des propulseurs que dans celle des [illegible] à réaction. Il ne nous paraît pas possible de traiter cette question par la même méthode que celle que nous avons suivie pour les propulseurs hélicoïdaux, car pour les hélices sustentatrices les phénomènes sont tout à fait différents ; nous ne pouvons pas suivre, comme dans le cas des propulseurs, la trajectoire des filets gazeux, car nous n'en connaissons pas la direction.

Devant l'hélice, qui tourne au point fixe, il se produit une aspiration d'air, et les filets gazeux arrivent de tous côtés pour combler la dépression produite ; il est donc impossible de déterminer sous quels angles d'attaque ils rencontreraient les ailes de l'hélice sustentatrice.

Il semblerait rationnel, à première vue, pour arriver à utiliser le mieux possible la puissance motrice et obtenir le maximum de sustentation, de chercher à avoir des angles d'attaque minimum, voisins de l'angle optimum. Connaissant la vitesse de rotation de l'hélice, si l'on connaissait la direction des filets d'entrée, il ne serait pas difficile de déterminer les conditions nécessaires, malheureusement nous sommes dans l'ignorance absolue de ces directions, qui sont probablement différentes aux différents points de l'hélice. D'autre part, le pas réduit de l'hélice, pas que semble indiquer la nécessité d'un faible angle d'attaque, entraîne une grande surface propulsive, par conséquent un grand diamètre, de nombreux bras, et exige un grand nombre de tours de l'hélice, faute de quoi la sustentation serait insuffisante puisqu'elle s'exprime par $P = s \cdot W^2 \cdot \alpha \cdot \lambda$. Toutes ces conditions entraînent, à leur tour, la nécessité de donner, à l'hélice en question, une grande résistance, car on a affaire à des efforts excessivement considérables dus à la force centrifuge ; de là un poids très considérable pour l'hélice sustentatrice, qui absorbera, pour son propre compte, une notable partie de la force sustentatrice. Il sera, par conséquent, peut-être plus avantageux d'augmenter le pas, quitte à utiliser moins bien la puissance. Quoi qu'il en soit, la question des hélices sustentatrices nous paraît très difficile à résoudre dans la pratique et comme nous ne pouvons pas la traiter au point de vue théorique, nous n'avons pas cherché à la faire rentrer dans le cadre de cette étude.

[illegible]

Admettons d'abord le cas d'un monoplan qui, pour marcher à [illegible] à l'heure, [illegible] Ce sont, à peu près, les conditions de certains aéroplanes actuels.

Admettons que l'hélice tourne, en marche, à raison de 600 tours à la minute, soit 10 tours à la seconde. Nous aurons donc :

$$F = 50, \quad V = 20, \quad N = 10.$$

Il nous faut déterminer le nombre d'ailes de l'hélice. Nous aurons, d'après l'équation de compatibilité :

$$a = \frac{2500\,F \cdot N^2}{V^5} = \frac{2500 \cdot 50 \cdot 10^2}{20^5} = 3{,}906.$$

Nous pourrons donc prendre a égal soit à 3 soit à 4. Si nous donnions 3 ailes, il faudra multiplier les largeurs d'ailes par le coefficient de réduction $q = \frac{3{,}906}{3}$; si, au contraire, nous donnons 4 ailes, ce coefficient deviendra $q = \frac{3{,}906}{4}$, qui est plus proche de l'unité.

Nous choisirons donc le nombre de 4 ailes. Comme l'équation de compatibilité nous a montré que l'on peut adopter un nombre acceptable d'ailes normales, nous admettrons pour le propulseur des ailes normales. Dans l'appendice, nous avons groupé tous les éléments d'une aile normale, éléments qui sont toujours les mêmes pour toutes les ailes normales et exprimés tous en fonction du module. Nous n'avons donc qu'à déterminer le module de notre aile.

Le module M sera $\frac{A}{2\pi}$ ou bien $\frac{V}{2\pi N}$, pour notre cas :

$$M = \frac{20}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10} = 0^m{,}318.$$

Alors le rayon du moyeu sera :

$$r_0 = 0,5 \times 0^m,318,$$

ce qui donnera pour le diamètre du moyeu :

$$d = 0^m,318,$$

et pour le diamètre de l'hélice :

$$D = 2^m,180.$$

Le nombre d'ailes sera de 4.

Pour le tracé de l'hélice, nous diviserons le rayon en parties égales au module, sauf la première division, qui sera égale à la moitié du module :

Divisions du rayon r	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Valeurs de $\frac{H}{2\pi}$ M (prises du tableau de l'appendice)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Valeurs du pas H = ... Les nombres précédents ont été multipliés par 2π.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Largeur spécifique constante	$L \times q = 0^m$[illegible]					

Dans le tableau ci-dessus nous avons rangé, dans la première ligne, les divisions du rayon auxquelles correspondent les pas variables de l'aile. Ces pas sont rangés dans la troisième ligne ; ils ont été obtenus en multipliant, par 2π, les valeurs de la rangée précédente, qui sont $\frac{H}{2\pi}$ M, tirées elles-mêmes du tableau de l'appendice. Enfin, dans la dernière ligne, nous avons indiqué la largeur spécifique constante de l'aile, que l'on obtient en multipliant par M la largeur indiquée dans le tableau ; de plus, nous l'avons multipliée par le coefficient de réduction q.

Voilà donc tous les éléments de notre hélice déterminés suffisamment pour pouvoir en entreprendre la construction.

Comme deuxième exemple, nous choisirons des conditions spéciales où des ailes normales ne pourraient pas être employées. Supposons une hélice de ballon dirigeable, mue par un moteur de 100 HP, marchant à une vitesse de 14 mètres à la seconde, soit 50 kilomètres à l'heure. Supposons de plus que le nombre de tours soit de 360 tours à la minute, soit 6 tours à la seconde.

Voyons s'il sera possible de donner au propulseur un nombre acceptable d'ailes normales ; pour cela, posons :

$$A = \frac{[illegible]}{14^2} = 16,73.$$

Comme, en réalité, il ne nous sera possible d'employer que 4 ailes au maximum, nous devons renoncer aux ailes normales. Le coefficient de réduction sera :

$$q = \frac{16,73}{4} = 4,2 \text{ environ.}$$

Nous avons vu plus haut que si l'on donnait à l'aile un rayon égal à 7M, alors la largeur spécifique, égale au $\frac{1}{6}$ de la longueur de l'aile, augmentait la surface active de 4,1 fois. C'est précisément ce qu'il nous faut en cas échéant, nous pourrons donc prendre comme limite pour l'aile, $r_1 = 7M$.

Pour déterminer le module, nous poserons :

$$M = \frac{V}{2\pi N} = \frac{14}{6,28 \cdot 6} = 0^m,371,$$

ce qui nous donnera pour le diamètre du moyeu :

$$d = 0^m,371,$$

et pour celui de l'hélice :

$$D = 14 \cdot M = 5^m,194.$$

le nombre d'ailes sera de 4.

Divisions du rayon r...	0m185	0m371	0m742	1m113	1m484	1m855	2m226	2m597
Valeurs de $\frac{H}{g\pi}$.......	0m405	0m392	0m401	0m411	0m422	0m435	0m444	0m456
Valeurs de H.........	2m525	2m480	2m522	2m556	2m645	2m715	2m795	[illegible]
Largeur spécifique constante..............	$L = 0,275\,M \cdot \frac{16,73}{4} = 0^m427$							

Dans le tableau ci-dessous, nous avons rangé, comme précédemment, les éléments du calcul en multipliant le module successivement par les nombres [illegible].

Ci-dessous nous avons inscrit les pas variables de cette aile en multipliant les valeurs de $\frac{H}{M}$, prises dans le tableau de l'appendice, par le module. Ci-dessous, nous avons indiqué la largeur spécifique constante qui est, comme nous l'avons vu plus haut, égale à [illegible] du module pour $n_1 = 7M$. En multipliant cette valeur par le coefficient de réduction φ, on trouve une largeur [illegible] qui est constante sur la totalité de la longueur de l'aile.

Si l'on voulait donner à l'aile une autre forme que celle à largeur spécifique constante, on prendrait les chiffres calculés par une des formules que nous avons indiquées ci-dessus et on multiplierait ces chiffres par le module et par le coefficient de réduction φ.

Avant de terminer cette étude sur les hélices aériennes, nous avons encore quelques observations à faire au sujet de la construction même des ailes d'hélice, construction qui présente quelques difficultés spéciales.

Ces difficultés résultent principalement de la condition de très grande légèreté à laquelle doivent satisfaire les hélices aériennes de par leur destination même; de plus, ces difficultés augmentent encore en raison des grands diamètres et du nombre de tours considérables qu'il y a lieu de donner aux propulseurs aériens; on a, dans ces cas-là, affaire à des efforts formidables dus à la force centrifuge.

Pour que l'aile travaille dans de bonnes conditions, il faut, avant tout, qu'elle ne se déforme pas. Or, cette déformation est inévitable pour une aile mince lorsqu'on la fixe sur le bras de l'hélice par le milieu de sa largeur, comme on le fait ordinairement. Il se produit alors fatalement une torsion due à la position des centres de poussée de l'air le long de l'aile. Lorsqu'un plan mince attaque l'air obliquement, le centre de poussée se trouve reporté vers le bord antérieur du plan en un point qui dépend de l'incidence; pour de très faibles incidences, comme celles auxquelles nous avons affaire pour les hélices, on peut admettre que ce centre de poussée se trouve à une distance, de l'arête d'entrée, égale au quart ou au cinquième de la profondeur totale du plan mince. En admettant pour les ailes d'hélices un quart de leur largeur, nous serons dans des conditions assez proches de la réalité. Il y aura donc tout le long de l'aile une ligne partageant l'aile en deux parties, l'une, avant, d'un quart de la largeur totale et l'autre, arrière, occupant les trois quarts de la largeur de l'aile, cette ligne sera le lieu des centres de poussée de l'air. Il faudra donc, pour éviter la torsion de l'aile, faire coïncider la base résistante, sur laquelle est fixée la surface de l'aile, avec cette ligne des centres de poussée. Pour les ailes en bois, cette ligne devra correspondre à la plus grande épaisseur du bois.

Il y a encore une autre condition à laquelle devra être soumise l'aile de propulseur, c'est celle de ne pas recevoir de contre-pression nuisible sur sa face dorsale ; il faut, pour cela, éviter que les filets gazeux ne viennent rencontrer une partie quelconque de cette face dorsale sous un angle positif.

Afin de satisfaire à ces deux conditions, on peut adopter une section d'aile semblable à celle représentée par la figure 11.

Cette figure, qui est la section cylindrique rectifiée d'une aile en bois, nous montre la face active ou poussante de l'aile en ACB. La ligne AC est droite et a été tracée par le procédé que nous avons indiqué plus haut, elle fait, avec la direction des filets gazeux, représentée par la droite MC, un angle d'incidence voisin de 2°. La longueur AC équivaut aux trois quarts de la largeur totale de l'aile AB, en ce point du rayon ; la longueur CB n'est que le quart de cette largeur. A partir du point C, correspondant à la plus forte épaisseur de l'aile, la face poussante devient convexe, suivant une courbe, aussi douce que possible, qui vient rejoindre l'arête d'entrée en un point B qui fait partie de la face dorsale de l'aile ; de cette façon, la partie avant de l'aile forme un bec d'entrée dont la pointe se trouve sur la face dorsale. Cette face dorsale est constituée par une courbe qui, au point B, est tangente à la direction des filets gazeux parallèles à MC, et qui rejoint la face poussante à l'arête de sortie A, donnant ainsi à l'aile une section aussi mince que possible dans sa partie arrière. Une aile construite sur ce modèle n'aurait pas de tendance à se tordre, puisque l'épaisseur maximum de la [illegible] ou rapportée le long de la ligne des centres de pression, et, de plus, elle ne recevrait sur sa face dorsale aucune pression nuisible ; en revanche, elle présenterait l'inconvénient de rencontrer les filets gazeux sous une trop forte incidence, sur toute la partie avant de l'aile grâce à la courbure du bec ; cet inconvénient abaisserait certainement un peu le coefficient général de rendement de l'aile, mais il y a tout lieu de supposer que cet abaissement serait inférieur à celui que subirait ce même coefficient si l'aile était disposée de façon à recevoir les filets gazeux sur une partie de sa face dorsale.

On peut adopter aussi cette même section d'aile, lorsque l'aile n'est pas faite en bois massif. On peut donc sur le rayon

principal, qu'il soit en bois ou en tube métallique, des membrures transversales ayant la même section que celle représentée figure 11, et espacées à une certaine distance l'une de l'autre, le long du rayon, de façon à former la surface hélicoïdale de l'aile. Sur ces membrures on tendrait, sur les deux faces de

tube métallique, des mem-
ection que celle représentée
distance l'une de l'autre, le
la surface hélicoïdale de
it, sur les deux faces de

l'aile, [illegible]

Si l'on désire construire l'aile avec une tôle métallique [illegible] la forme de la surface hélicoïdale calculée, [illegible] sur la face dorsale de l'aile ; il faut éviter naturellement que la saillie de cette nervure ne soit pas trop prononcée.

De même qu'au point de vue constructif, le [illegible] biplan présente un avantage sur le monoplan, de même aussi il nous paraît possible d'arriver à réaliser de bonnes hélices propulsives en doublant les ailes l'une derrière l'autre, et les plaçant à une distance d'environ une largeur d'aile. Ce système, pour les ailes métalliques minces, pourrait avoir l'avantage d'augmenter la surface active, tout en augmentant considérablement la solidité du propulseur ; on pourrait, en effet, relier les deux ailes parallèles par des cloisons transversales cintrées suivant des arcs de cercle d'un rayon correspondant à leur position sur l'aile ; ces cloisons seraient espacées le long de l'aile et triangulées au moyen de tirants plats travaillant à la tension. Des ailes de ce genre seraient des ailes cellulaires et les cloisons transversales empêcheraient l'air de s'écouler le long de l'aile en le canalisant dans le sens transversal.

Il est encore une sorte d'aile de propulseur, peu étudiée jusqu'ici, mais qui, selon toute probabilité, sera utilisée dans l'avenir avec succès, c'est l'aile flexible et élastique semblable aux rémiges des grands oiseaux. Cette aile pourrait consister en une série de ressorts plats fixés, par leur extrémité la plus épaisse, le long du bras de l'hélice, qui serait aussi aplati et formerait génératrice d'entrée ; ces ressorts seraient espacés à une certaine distance l'un de l'autre et formeraient par leur ensemble une surface hélicoïdale concave. La résistance des ressorts, à la flexion, devrait être calculée de façon à ce que la poussée totale sur l'aile, divisée par le nombre des ressorts, soit suffisante pour redresser la courbure de chaque ressort, de manière à lui donner une direction rectiligne faisant avec la direction des filets gazeux un angle très faible. Il faudrait que les résistances des différents ressorts soient répartis en raison directe du carré du rayon correspondant, autrement dit que les ressorts du bout de l'aile soient beaucoup plus résistants que ceux de la base. Les ressorts, une fois faits et essayés séparément au dynamomètre, seraient recouverts d'une étoffe élastique qui se tendrait au moment de la déformation des ressorts. Une aile de ce genre serait délicate à construire, mais nous croyons que, si elle était convenablement calculée, elle réaliserait un propulseur de très bon rendement.

Nous voilà parvenus au terme de la tâche que nous nous sommes imposée. Nous avons, dans cette étude, cherché à exposer, aussi clairement que nous l'avons pu, une méthode qui donne, sur la question des propulseurs hélicoïdaux, une vue d'ensemble grâce à laquelle il soit possible à l'investigateur de voir, par les yeux de l'esprit, les phénomènes invisibles qui échappent à la vue physique. Cette méthode est destinée à permettre à l'esprit, guidé par le calcul et la connaissance des lois mécaniques, de s'orienter dans le dédale obscur des phénomènes complexes et peu connus, où, faute d'un fil conducteur, il perd la notion des relations nécessaires, ne les distingue plus des contingences et se raccroche aux indications qu'il saisit, au hasard, dans les observations de la pratique courante, indications justes peut-être dans certains cas, mais, plus souvent encore, d'apparence trompeuse et dénaturant la réalité des choses.

Pour l'aviation, la perfection des propulseurs est une question de tout premier ordre, pour la solution de laquelle les procédés de tâtonnements empiriques sont absolument insuffisants, il est donc indispensable de l'éclairer par la lumière vive que, seule, projette une méthode générale et scientifique.

Heureux serions-nous si, dans ce travail, nous avons réussi à apporter à la question une contribution dans cet ordre d'idées.

Paris, 1909.

S. DRZEWIECKI.

TABLEAU DES ÉLÉMENTS D'UNE AILE NORMALE

Subdivisions du rayon $\frac{r}{M}$	tang β	[illegible]	Pas $\frac{H}{M}$	Largeur de l'aile $\frac{l}{M}$	Largeur spécifique constante $\frac{L}{M}$
Rayon du moyeu $\frac{r_0}{M}$	0,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—
Rayon extrême $\frac{r_1}{M}$	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—

$M = \frac{V}{2\pi N}$. Le nombre d'ailes $a = \frac{2500\ F.\ N^3}{V^3}$

Les largeurs $\frac{l}{M}$ ont été calculées par la formule :

$\frac{l}{M} = \frac{[illegible]}{[illegible]} \cdot \frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible]

TABLEAU DES ÉLÉMENTS D'UNE AILE SUPÉRIEURE A LA NORMALE

Subdivisions du rayon $\frac{r}{M}$	tang β	[illegible]	Pas $\frac{H}{M}$	Largeur spécifique constante $\frac{L}{M}$	Rapport [illegible]	a' nombre d'ailes réel a nombre d'ailes calculé
Rayon du moyeu $\frac{r_0}{M}$	0,5	1,085	6,905			$a = \frac{2500\,F\,N^3}{V^3}$
	1	1,066	6,685			
	2	1,081	6,781			$q = \frac{a'}{a}$
	3	1,108	6,945			
	4	1,136	7,131	Jusqu'à $r_1 = 5M$	$\frac{1}{6}$	Il y aura lieu
	5	1,167	7,318	0,750		de multiplier
	5,5	1,182	7,415	Jusqu'à $r_1 = 6M$	$\frac{1}{13}$	les largeurs $\frac{M}{L}$
Rayons extrêmes $\frac{r}{M}$	6	1,197	7,508	0,427		par le rapport q.
	6,5	1,214	7,615	Jusqu'à $r_1 = 7M$	$\frac{1}{25}$	
	7	1,230	7,713	0,275		
	7,5	1,244	7,860	Jusqu'à $r_1 = 8M$	$\frac{1}{44}$	
	8	1,262	7,916	0,173		

APPENDICE

TABLEAU C

tang β	0,5	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
arc β	26° 34′	45°	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
arc (β − α)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
log. tang β	$\bar{1}$,6990	0,0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
log tang (β − α)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\log \frac{\tang \beta}{\tang (\beta - \alpha)}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\frac{\tang \beta}{\tang (\beta - \alpha)} = \frac{H}{\mu M}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\frac{\tang \beta \cdot \mu}{\tang (\beta - \alpha)} = \frac{H}{M}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

TABLEAU E

x	0,5	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\log \frac{x}{1 + \mu x}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

TABLEAU I